شماره تکلیف: ۲۱ — سمی دستجی

۲۰ آفرین

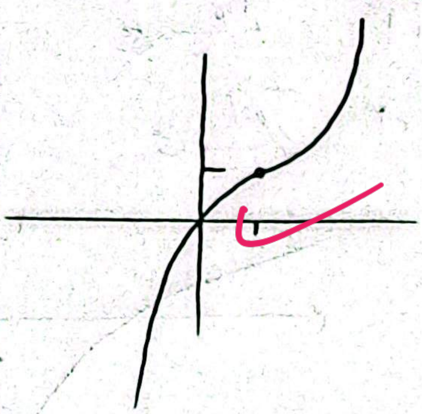
①

الف) $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 1}$ ✓

نقطه عطف: $x = 1$

ب)

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗



(۲)

②

الف) $y' = \dfrac{(-3x^2)(x^2) - (-x^3+4)(2x)}{x^4} = \dfrac{-x^4 - 8x}{x^4} = \dfrac{-x^3-8}{x^3}$

$\rightarrow y' = \dfrac{-(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3} = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2} \rightarrow$ نقطه بحرانی ✓

ب) $\Rightarrow y' = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$

$x = 0 \;,\; x = \pm\sqrt{3} \rightarrow$ نقطه بحرانی ✓

(۲)

③

الف) $y' = \dfrac{(-2x+4)(x-1) - (-x^2+4x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-x^2+2x-5}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow$ تعیین علامت

x		1	
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	↘	‖	↘

نقطه اکسترمم ندارد چرا که تغییر علامت رخ نداده است ✓

(۲)

ب) $y=\frac{(x-2)(x-1)}{x-1} \rightarrow y=x-2$ و $x\neq 1$

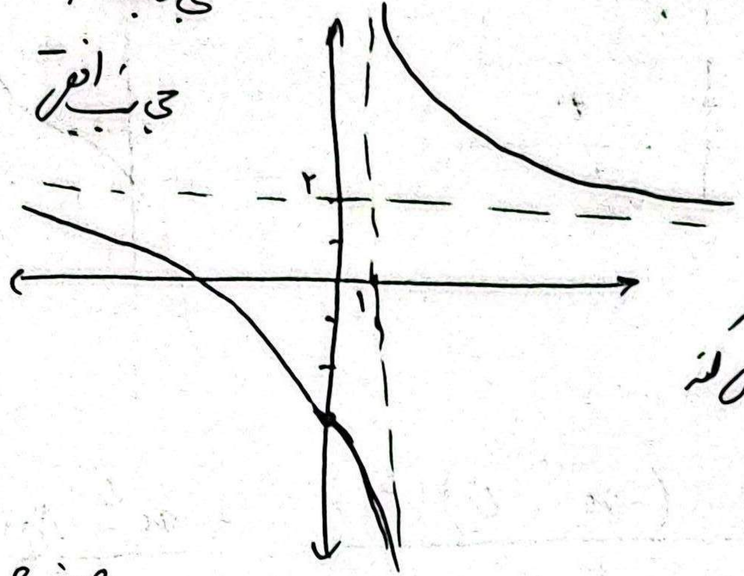
این تابع نیز اکسترمم ندارد چرا که معادله یک خط است

(۴)

الف) $x=1$ مجانب قائم

$y=2$ مجانب افقی

ب)



و لذا همه نواحی ها عبور می‌کند

(۵)

الف)

$x=3 \rightarrow$ مجانب قائم (ریشه مخرج) $\Rightarrow x-b=0 \overset{x=3}{\Rightarrow} \boxed{b=3}$

$y=2 \rightarrow \frac{ax}{x}=\boxed{a=3}$

ب) $f(x)=\frac{2x+4}{x-3}=y \Rightarrow x=-\frac{-3y-4}{y-2}=\frac{3y+4}{y-2} \Rightarrow$

$f^{-1}(x)=\frac{3x+4}{x-2}$

(۶) می‌دانیم که شیب ها ۱ و منفی یک است پس:

مرکز تقارن: $(2, 3)$

$y-3=1\times(x-2) \Rightarrow y=x+1$

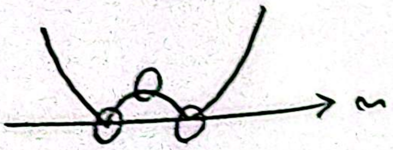
$y-3=-1(x-2) \Rightarrow y=-x+5$

(۷) نقاط عطف ← مشتق ناپذیر
مشتق برابر صفر

(۲)

پس ۶ نقطه داریم که بحرانی هستند (۲ نقطه گوشه‌ای و ۳ نقطه با مشتق صفر و ۱ نقطه با شیب نامتناهی)

(۸) برای این که ۳ نقطه بحرانی داشته باشد علاوه بر نقطه‌ای که مشتق صفر دارد باید دو ریشه متمایز داشته باشد تا شکل و مصداق نمودار روبه‌رو باشد:



(۲)

$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 8 > 0 \Rightarrow a^2 > 8 \rightarrow a > 2\sqrt{2}$ یا $a < -2\sqrt{2}$

(۹)

$f'(x) = \frac{2x(x^2+x+2) - (x^2+2)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{x^2-2}{(x^2+x+2)^2} = 0 \Rightarrow$

همواره مثبت

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

max نسبی ← $\frac{4}{4-\sqrt{2}}$ ، min نسبی ← $\frac{4}{4+\sqrt{2}}$

(۲)

$\Rightarrow \frac{4}{4-\sqrt{2}} \times \frac{4}{4+\sqrt{2}} = \frac{16}{14} = \boxed{\frac{8}{7}}$

(۱۰)

$y = x^2 + x - 2 \longrightarrow y = (x^2+x-2)^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 2(x^2+x-2)(2x+1) = 0$

ریشه‌ها: -2 ، 1 ، $-\frac{1}{2}$

یعنی عدد →

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
y'	−	0	+	0	−	0	+
y	↘		↗		↘		↗

max نسبی در $-\frac{1}{2}$ ✓

$y = (x^2 + x - 2)^3 \longrightarrow y' = 3(x^2 + x - 2)^2 (2x + 1) = 3(x+2)^2 (x-1)^2 (2x+1)$

تعیین علامت ←

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
y'	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↘		↘	min نسبی	↗		↗

اختلاف طول ها $= (-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2}) = 0$

✓

۲