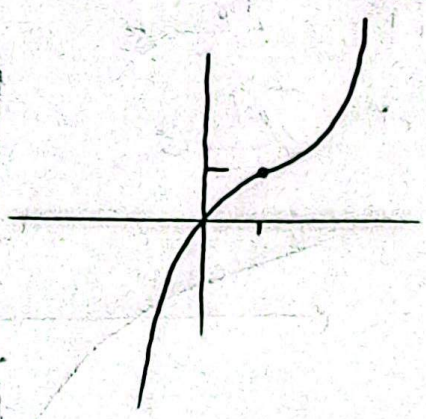
①

الف) $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

نقطه عرض: $x = 1$

ب)

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗



②

الف) $\frac{1-x^2}{x^3}$, $y' = \frac{(-3x^2)(x^2) - (-x^3+1)(2x)}{x^4} = \frac{-x^4 - 2x}{x^4}$

$\rightarrow y' = \frac{-(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3} = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$ نقطه عرض

ب) $\frac{x^2(x^2-4)}{(1-x^2)^2}$, $y' = \frac{2x^3(x^2-1) - x^4(2x)}{(x^2-1)^2}$, $\frac{2x^4 - 2x^3 - 2x^4}{(1-x^2)^2}$

$\Rightarrow \frac{-2x^3}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$ نقطه عرض

$x = 0, x = \pm\sqrt{4}$ $\rightarrow$ نقطه عرض

③

الف) $y' = \frac{(-2x+4)(x-1) - (-x^2+4x+1)}{(x-1)^2}$, $\frac{-x^2+2x-5}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow$ تعیین علامت

x		1	
$f'(x)$	$-$	∄	$-$
$f(x)$	↘	∄	↘

نقطه اکسترمم ندارد، زیرا تغییر علامت در مشتق نداریم

ب) $y = \frac{(x-2)(x-1)}{x-1} \quad x \neq 1$ و $y = x-2$

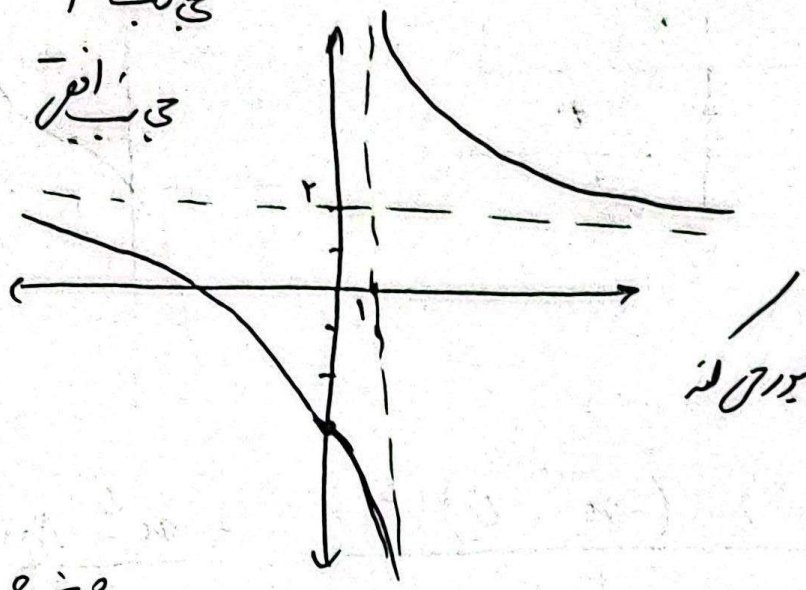
این تابع نیز اکثر هم ندارد چرا که معادله یک خط است

۴

الف) $x < 1$ جی‌پ قائم

$y < 2$ جی‌پ افقی

ب)



و نمودار توابع همینطوری است

۳

الف) ریشه مخرج $x < 2$ و جی‌پ قائم $\Rightarrow x - b = 0 \Rightarrow \boxed{b < 2}$

$y < 2 \rightarrow \frac{ax}{x} = \boxed{a < 2}$

ب) $f(x) = \frac{2x+4}{x-2} = y \Rightarrow x = \frac{-2y-4}{y-2} = \frac{2y+4}{y-2} \Rightarrow$

$f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-2}$

۶) با فرض اینکه یک تابع یک به یک است پس:

گذر تقاطع: $(2, 3)$

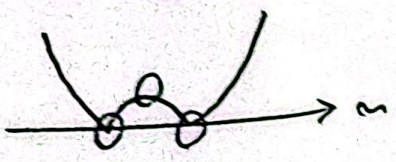
$y - 2 < 1(x-2) \Rightarrow y < x+1$

$y - 2 < -1(x-2) \Rightarrow y < -x+5$

⑧ نقاط عبارتند از نقاط تقاطع با محور x و نقاط تغییر علامت مشتق (نقاط بحرانی)

پس ۶ نقطه داریم که بحرانی هستند (۲ نقطه گوشه‌ای، ۳ نقطه مشتق صفر و ۱ نقطه بی‌نهایت مشتق)

⑦ برای این که ۳ نقطه عبور داشته باشد علاوه بر نقطه‌ای که مشتق صفر دارد باید دو نقطه دیگر داشته باشد تا شکل و مصداق نمودار ردیف رو باشد:

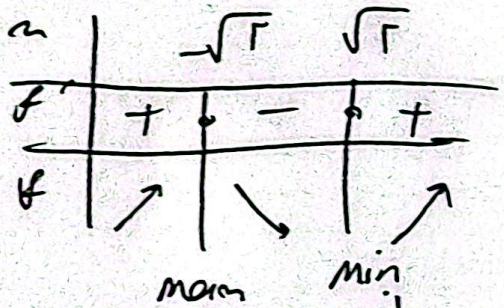


$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 8 > 0 \Rightarrow a^2 > 8 \rightarrow a > 2\sqrt{2} \ \text{یا} \ a < -2\sqrt{2}$$

⑨

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+x+1) - (x^2+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2-2}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Rightarrow$$

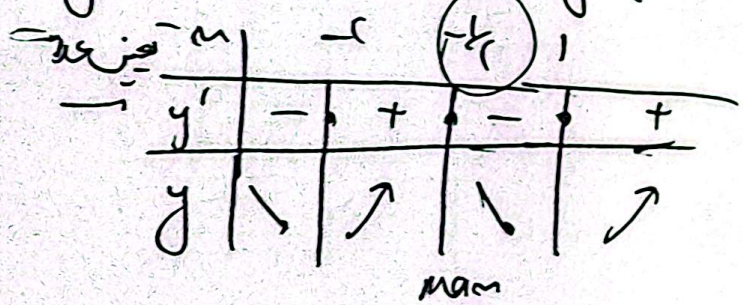
صورت کسر



$$\frac{3}{2-\sqrt{2}} \qquad \frac{3}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{3}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left| \frac{1}{2}, \frac{17}{12}, \frac{1}{8} \right|$$

⑩ $y = x^3 + x^2 - 2 \longrightarrow y = (x^2+x-2)^3 \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 3(x^2+x-2)^2(2x+1) = 0$

$x^2+x-2 = 0$: -2, 1 — $2x+1=0$: $-\frac{1}{2}$



$y = (x^2+x-6)^3 \rightarrow y' = 3(x^2+x-6)^2(2x+1) = 3(x+3)^2(x-2)^2(2x+1)$

تعیین علامت

x	-3		$-\frac{1}{2}$		2
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	↘	↘	min	↗	↗

اختلاف طول $= (-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2}) = 0$