«به نام خدا»

«کیوان مکارم تشب»

تکلیف شماره ۲۸

دوازدهم تجربی B

۱

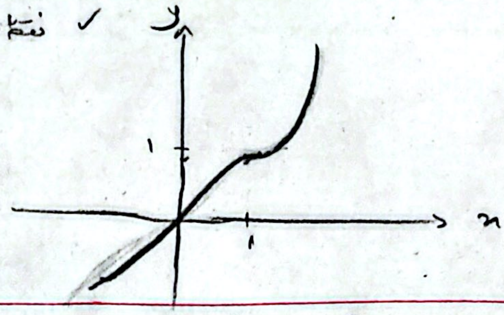
الف) $y = x^3 - 3x^2 + 3x \to y' = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x + 1 = 0 \to x = 1$

$f(1) = 1 - 3 + 3 = 1 \to \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ نقطه بحرانی ✓

$D_f = \mathbb{R}$

ب)

x		1	
f'	$+$	0	$+$
f	↗		↗



۲

الف) $y = \frac{-x^3+4}{x^2} \to y' = \frac{(-3x^2)(x^2) - (-x^3+4)(2x)}{x^4} = \frac{-3x^4 + 2x^4 - 8x}{x^4}$

$y' = \frac{-x^4 - 8x}{x^4} = \frac{-x(x^3+8)}{x^4} \to f'(x) = \frac{-x^3-8}{x^3} = 0 \to x = -2$ نقطه بحرانی (مشتق صفر شده است) ✓

$x = 0$ مشتق تعریف نشده است ✗ ← بحرانی نیست چون در دامنه تابع وجود ندارد!!

← نقطه بحرانی $\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$ ✓ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ *

ب) $y = \frac{x^3}{x^2-1} \to y' = \frac{(3x^2)(x^2-1) - (x^3)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2}$

$\to f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0$

$x = 0$ طول نقطه بحرانی ✓

$x = \pm\sqrt{3}$ طول نقاط بحرانی ✓

نقاط بحرانی $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ ✓

$x = \pm 1$ در دامنه تابع نیست. ✗ پس بحرانی نیست!!

$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ *

۳

الف) $y = \frac{-x^2+4x+1}{x-1} \to y' = \frac{(-2x+4)(x-1) - (-x^2+4x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-2x^2+2x+4x-4+x^2-4x-1}{(x-1)^2}$

$\to y' = \frac{-x^2+2x-5}{(x-1)^2} \to$ مشتق همواره منفی ← تابع اکیداً نزولی ← نقطه اکسترمم ندارد. ★

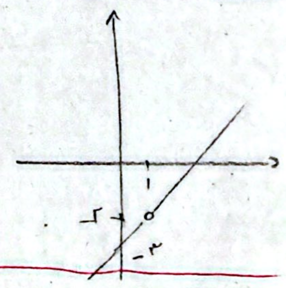
$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ب) $y = \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{(x-1)}} = x - 3$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$\to y' = 1$

اکسترمم ندارد. ✗

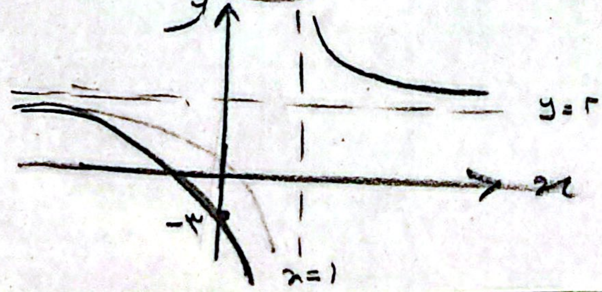


۴

الف) $y = \frac{2x+3}{x-1} \to x - 1 = 0 \to x = 1$ مجانب قائم

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2 \to y = 2$ مجانب افقی

ب)



← از هر ۴ ناحیه می‌گذرد.

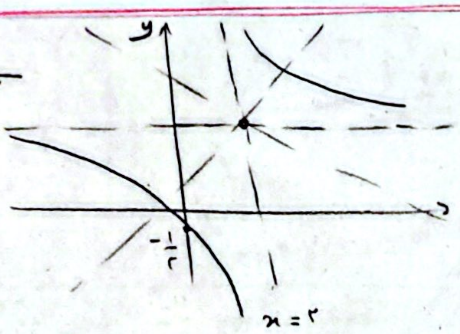
۵) الف) $y=\frac{ax+4}{x-b}$ ، $(2,3)$ مرکز تقارن $\rightarrow$ $x=2$ مجانب قائم ، $y=3$ مجانب افقی $\rightarrow$ $\boxed{a=3}$ ، $\boxed{b=2}$

ب) $y=\frac{3x+4}{x-2} \rightarrow x=\frac{3y+4}{y-2} \rightarrow xy-2x=3y+4$

$\rightarrow xy-3y=2x+4 \rightarrow y(x-3)=2x+4 \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x-3}$ ✓

---

۶) $y=\frac{3x+1}{x-2}$



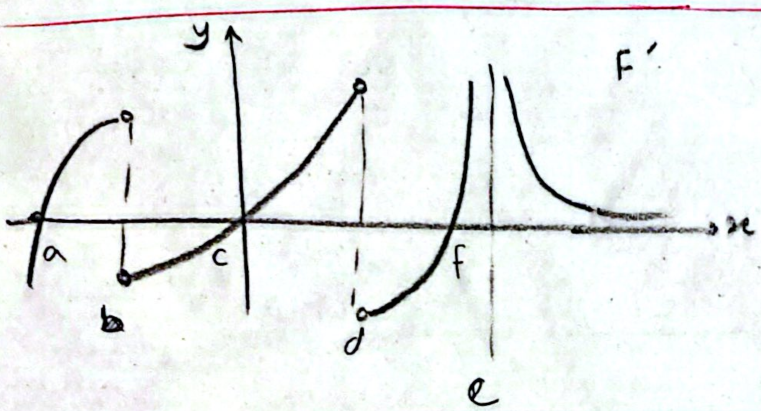
$y-3=\pm(x-2)$

معادله اول $\rightarrow y-3=x-2 \rightarrow \boxed{y=x+1}$

معادله دوم $\rightarrow y-3=-x+2 \rightarrow \boxed{y=-x+5}$

---

۷)

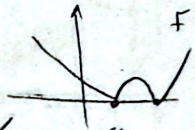


نقاط بحرانی تابع f عبارتند از نقاطی که مشتق تابع در آن صفر یا تعریف نشده هستند.

$\rightarrow$ نقاط بحرانی: $\{a, b, c, d, e, f\}$

---

۸) به مانند شکل طرفی روبه رو: تابع f باید یک معادله درجه ۲ دارای $\Delta>0$ باشد که وقتی



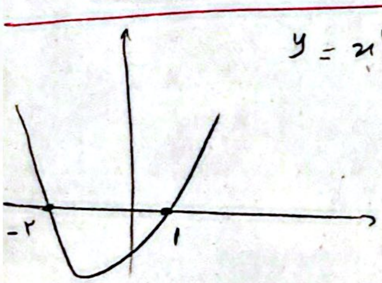
قدر مطلق به دور کل آن می‌آید، دارای دو نقطه گوشه‌ای و یک اکسترمم بشود ← درنتیجه $\Delta>0 \rightarrow a^2-8>0$

(تا نقطه بحرانی برای آن دار تعریف نشود)

$\rightarrow \boxed{a>2\sqrt{2} \text{ یا } a<-2\sqrt{2}}$ ✓

---

۱۰)



$y=x^2+ax+b \rightarrow 4-2a+b=0$

$\rightarrow 1+a+b=0$

$\rightarrow \begin{cases} 2a-b=4 \\ a+b=-1 \end{cases} \rightarrow 3a=3$

$\boxed{a=1}$, $\boxed{b=-2}$

$\rightarrow y=x^2+x-2 \rightarrow f(x)=(x^2+x-2)^2$

① $f'(x)=2(x^2+x-2)(2x+1)$

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
f'	$-$		$+$		$-$		$+$
f	↘		↗		↘		↗

$\boxed{x=-\frac{1}{2}} \Leftarrow f$ طول ماکسیمم نسبی

② $g(x)=(x^2+x-2)^3 \rightarrow g'(x)=3(x^2+x-2)^2(2x+1)$

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
g'	$-$		$-$		$+$		$+$
g	↘		↘		↗		↗

$\boxed{x=-\frac{1}{2}} \Leftarrow g$ طول مینیمم نسبی

$\left|-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right| = 0$ ②D ✓

$$y=\frac{x^2+2}{x^2+x+2}\ \rightarrow\ y'=\frac{(2x)(x^2+x+2)-(2x+1)(x^2+2)}{(x^2+x+2)^2}=\frac{\cancel{2x^3}+2x^2+\cancel{4x}-\cancel{2x^3}-\cancel{4x}-x^2-2}{(x^2+x+2)^2}$$

9

$$\rightarrow y'=\frac{x^2-2}{\underbrace{(x^2+x+2)^2}_{\text{همواره مثبت}}}\ \rightarrow$$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Max نسبی $=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\ \dfrac{4}{4-\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

Min نسبی $=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ \dfrac{4}{4+\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[\text{مقادیر Max, Min}]{\text{حاصل ضرب}}\ \frac{4}{4+\sqrt{2}}\times\frac{4}{4-\sqrt{2}}=\frac{16}{16-2}=\frac{16}{14}=\frac{8}{7}\ \checkmark$$