به نام خدا

ماهان نژادکرد

تکلیف ۲۸

۲۰ آفرین خیلی عالی نوشتی!

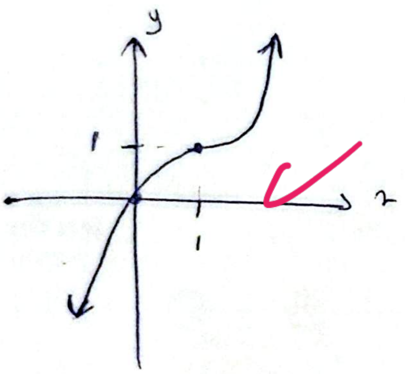
۱- نقاط بحرانی = $\begin{cases} f'(x)=0 \\ \text{تابع مشتق ناپذیر است.} \end{cases}$

$f(x)=x^3-3x^2+3x \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ ۲

تابع در تمام نقاط مشتق پذیر است.

الف) $x=1 \longrightarrow (1,1)$

ب) $y=x^3-3x^2+3x+1-1=(x-1)^3+1$



x		1	
y'	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\nearrow$

۲- الف) $y=\dfrac{-x^3+4}{x^2} \Rightarrow y'=\dfrac{(-3x^2)x^2-2x(-x^3+4)}{x^4}$

$=\dfrac{-3x^4+2x^4-8x}{x^4}=\dfrac{-x^4-8x}{x^4}=\dfrac{-x(x^3+8)}{x^4} \Rightarrow$ $x=0$ غ ق، $x=-2 \rightarrow f'(x)=0$ ، $(-2,3)$

نقطه $x=0$ قابل قبول نیست زیرا در دامنه نیست. در نقطه $x=-2$ بحرانی است زیرا $f'(-2)=0$

ب) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow y'=\dfrac{3x^2(x^2-1)-2x(x^3)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}$

$=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}\begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$ ۲

بحرانی $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ و 0 نقاط $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ ، $(0,0)$ ، $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

۳ - الف) $y = \frac{-x^2+4x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{(-2x+4)(x-1)-(-x^2+4x+1)}{(x-1)^2}$

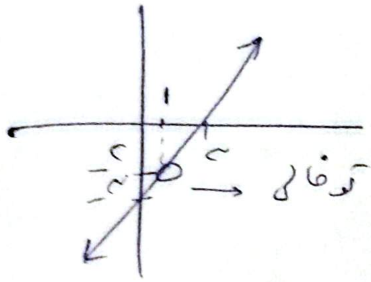
$= \frac{-x^2+2x-5}{(x-1)^2}$

x		1	
y'	−		−
y	↘		↘

۲

اکسترمم ندارد و نقطه $x=1$ در دامنه نیست و مجانب قائم است.

ب) $y = \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = x-3 \quad x \neq 1$



نمودار به صورت خط است و اکسترمم ندارد

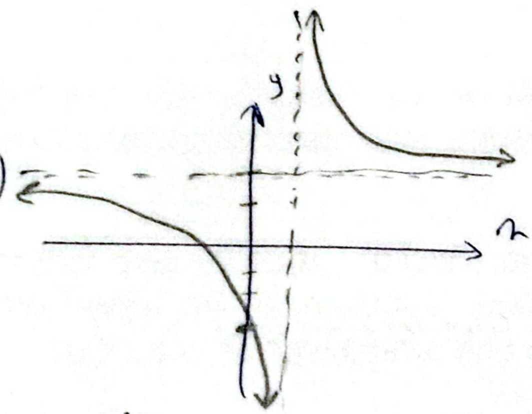
۴ - $y = \frac{2x+3}{x-1} \rightarrow$

مجانب افقی: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2 \Rightarrow y = 2$

مجانب قائم: $\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+3}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+3}{x-1} = -\infty$ $\Big\}\ x = 1$

۲

ب)



نمودار از تمامی نواحی مشخص شده می‌گذرد

۵ - چون نقطه (۳،۲) مرکز تقارن است پس

$x = 2 \rightarrow$ مجانب قائم، ریشه مخرج

$y = 3 \rightarrow$ مجانب افقی، $\frac{a}{c} = \frac{a}{1} = 3$

$\boxed{a = 3}$

ریشه مخرج: $x - b \overset{x=2}{=} 2 - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2}$

۵) $y = \frac{3x+4}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = 3x + 4$

$\Rightarrow x(y-3) = 2y+4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-3}$

۲

۶ - $y = \frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجانب قائم} \Rightarrow x = 2 \\ \text{مجانب افقی} \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow (2,3)$ مرکز تقارن

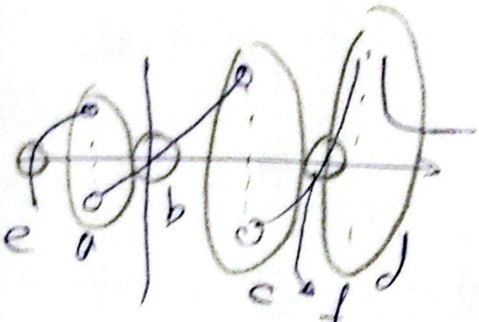
می‌دانیم محورهای تقارن تابع هموگرافیک دارای شیب‌های ۱ و ۱- بوده و از مرکز تقارن می‌گذرند

$m = 1 \Rightarrow y - 3 = 1(x-2) \Rightarrow \boxed{y = x + 1}$

$m = -1 \Rightarrow y - 3 = -1(x-2) \Rightarrow \boxed{y = -x + 5}$

۲

۷- ۶ نقطه بحرانی داریم:



$\{e, b, f\} \Rightarrow$ مشتق برابر صفر است

۲

$\{a, c\} \Rightarrow$ مشتق چپ و راست برابر نیست و نقطه گوشه‌ای است، مشتق ندارد.

$\{d\} \Rightarrow$ مشتق چپ و راست برابر ∞ است و نقطه بازگشتی است، مشتق ندارد.

۸- یکی از نقاط بحرانی اکسترمم نسبی است، پس ۲ نقطه دیگر باید ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق (نقاط گوشه‌ای) باشند پس معادله درجه دو باید ۲ ریشه داشته باشد پس باید $\Delta > 0$ باشد داریم:

$y = |x^2 - ax + 2| \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 8 > 0 \Rightarrow a > 2\sqrt{2},\ a < -2\sqrt{2}$

۲

۹ _

$$y = \frac{x^2+2}{x^2+x+2} \Rightarrow y' = \frac{2x(x^2+x+2)-(2x+1)(x^2+2)}{(x^2+x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2-2}{(x^2+x+2)^2}$$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		max نسبی		min نسبی	

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) = \frac{4}{4+\sqrt{2}} \quad , \quad f(-\sqrt{2}) = \frac{4}{4-\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) \cdot f(-\sqrt{2}) = \frac{4}{4+\sqrt{2}} \times \frac{4}{4-\sqrt{2}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

راه ۲:

$$y_{min} \times y_{max} = \frac{\Delta_{\text{صورت}}}{\Delta_{\text{مخرج}}} = \frac{-8}{-7} = \frac{8}{7}$$

$ab \neq a'b'$

۴

۱۰-

$$y = K(x - x_1)(x - x_2) = K(x+2)(x-1) = K(x^2+x-2)$$

$$= x^2 + ax + b \rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$y = (x^2+ax+b)^2 = (x^2+x-2)^2 \rightarrow y' = 2(x^2+x-2)(2x+1)$$

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	min نسبی	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

$\rightarrow x = -\frac{1}{2}$ max نسبی است

$$y = (x^2+ax+b)^3 = (x^2+x-2)^3 \rightarrow y' = 3(x^2+x-2)^2(2x+1)$$

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
y'	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↘		↘	min نسبی	↗		↗

$\rightarrow x = -\frac{1}{2}$ min نسبی

۲

$$\left|-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = 0$$

اختلاف طول ها برابر صفر است!