به نام خدا

ماهان نژادکرد

تکلیف ۲۸

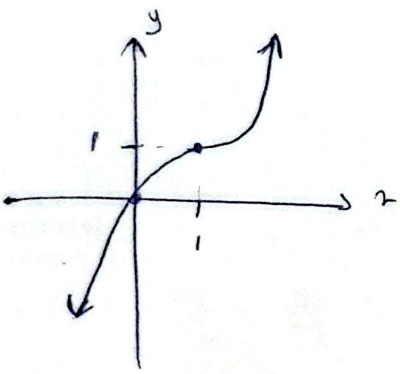
۱ـ نقاط بحرانی = $\begin{cases} f'(x)=0 \\ \text{تابع مشتق ناپذیر است.} \end{cases}$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 = 0$$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$ تابع در تمام نقاط مشتق پذیر است.

الف) $x=1 \longrightarrow (1,1)$

ب) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x-1)^3 + 1$



x		1	
y'	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\nearrow$

۲ـ الف) $y = \dfrac{-x^3+4}{x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{(-3x^2)x^2 - 2x(-x^3+4)}{x^4}$

$$= \frac{-3x^4 + 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{-x^4 - 8x}{x^4} = \frac{-x(x^3+8)}{x^4} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \ \text{تعریف} \\ x=-2 \rightarrow f'(x)=0 \end{array}$$

$\hookrightarrow (-2,3)$

نقطه $x=0$ قابل قبول نیست زیرا در دامنه نیست در نقطه $x=-2$ بحرانی است زیرا $f'(-2)=0$

ب) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1} \Rightarrow y' = \dfrac{3x^2(x^2-1) - 2x(x^3)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2}$

$$= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=\pm 1 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$\{\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3}\}$ = نقاط

$(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$

$(0,0)$

$(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

۳- الف) $y = \frac{-x^2+4x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{(-2x+4)(x-1)-(-x^2+4x+1)}{(x-1)^2}$

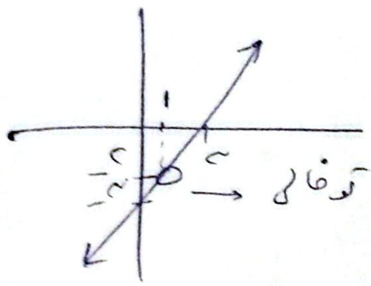
$= \frac{-x^2+2x-5}{(x-1)^2}$

x		1	
y'	$-$		$-$
y	↘		↘

اکسترمم ندارد و نقطه $x=1$ در دامنه نیست و مجانب قائم است.

ب) $y = \frac{x^2-4x+3}{x-1} = \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \underline{x-3 \quad x\neq 1}$

نمودار به صورت خط است و اکسترمم ندارد

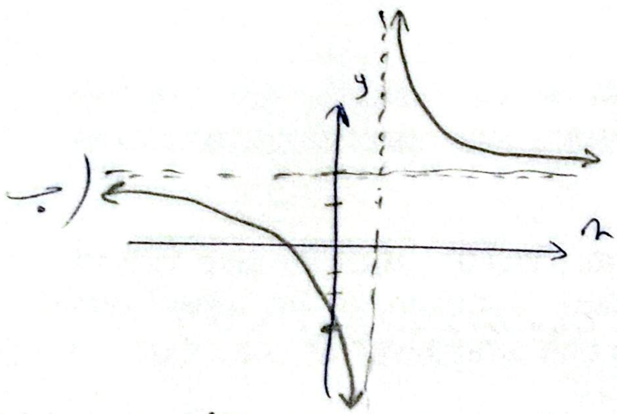


۴- $y = \frac{2x+3}{x-1} \Rightarrow$

مجانب افقی: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2 \Rightarrow y=2$

مجانب قائم: $\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+3}{x-1} = +\infty$ ، $\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+3}{x-1} = -\infty$ $\Big\}\; x=1$

ب)



نمودار از تمامی نواحی عبور می‌کند

۵- چون نقطه (۲,۳) مرکز تقارن است پس

$x=2 \to$ مجانب قائم، ریشه مخرج

$y=3 \to$ مجانب افقی، $\frac{a}{c} = \frac{a}{1} = 3 \Big\{ \boxed{a=3}$

ریشه مخرج: $x-b \overset{x=2}{=} 2-b=0 \Rightarrow \boxed{b=2}$

۵ ـ $y = \frac{3x+4}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = 3x+4$

$\Rightarrow x(y-3) = 2y+4 \Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-3}$

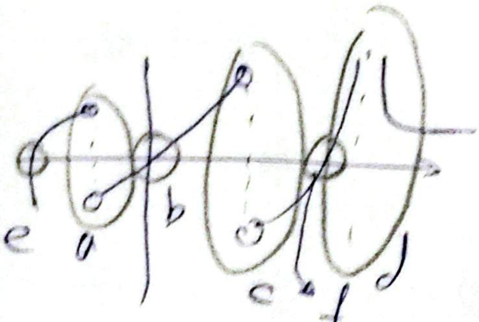
۶ ـ مرکز تقارن $(2,3) \Leftarrow$

$y = \frac{3x+1}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجانب قائم} \Rightarrow x = 2 \\ \text{مجانب افقی} \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

می‌دانیم محورهای تقارن تابع هموگرافیک دارای شیب‌های ± 1 بوده و از مرکز تقارن می‌گذرند

$m = 1 \Rightarrow y - 3 = 1(x-2) \Rightarrow \boxed{y = x+1}$

$m = -1 \Rightarrow y - 3 = -1(x-2) \Rightarrow \boxed{y = -x+5}$



۷ ـ ۶ نقطه بحرانی داریم:

$\{f, b, e\} \Leftarrow$ مشتق برابر صفر است

$\{a, c\} \Leftarrow$ مشتق چپ و راست برابر نیست و نقطه گوشه‌ای است، مشتق ندارد.

$\{d\} \Leftarrow$ مشتق چپ و راست برابر ∞ است و نقطه بازگشتی است، مشتق ندارد.

۸ ـ یکی از نقاط بحرانی اکسترمم نسبی است، پس ۲ نقطه دیگر باید ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق (نقاط گوشه‌ای) باشند پس معادله سهمی باید ۲ ریشه داشته باشد پس باید $\Delta > 0$ باشد داریم:

$y = x^2 - ax + 2 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 8 > 0 \Rightarrow a > 2\sqrt{2}$, $a < -2\sqrt{2}$

۹ـ

$$y = \frac{x^2+2}{x^2+x+2} \Rightarrow y' = \frac{2x(x^2+x+2)-(2x+1)(x^2+2)}{(x^2+x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2-2}{(x^2+x+2)^2}$$

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$	min نسبی	$\nearrow$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) = \frac{4}{4+\sqrt{2}} \quad , \quad f(-\sqrt{2}) = \frac{4}{4-\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}) \cdot f(-\sqrt{2}) = \frac{4}{4+\sqrt{2}} \times \frac{4}{4-\sqrt{2}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

راه ۲:

$$y_{min} \times y_{max} = \frac{\Delta_{\text{صورت}}}{\Delta_{\text{مخرج}}} = \frac{-8}{-7} = \frac{8}{7}$$

$$ab \neq a'b'$$

$$y = K(x - x_1)(x - x_2) = K(x+2)(x-1) = K(x^2 + x - 2)$$ -۱۰

$$= x^2 + ax + b \rightarrow \begin{cases} K = 1 \\ a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$y = (x^2 + ax + b)^2 = (x^2 + x - 2)^2 \rightarrow y' = 2(x^2 + x - 2)(2x + 1)$$

x		-2		$-\frac{1}{2}$		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	min نسبی	↗	max نسبی	↘	min نسبی	↗

$\rightarrow x = -\frac{1}{2}$ max نسبی است

$$y = (x^2 + ax + b)^3 = (x^2 + x - 2)^3 \rightarrow y' = 3(x^2 + x - 2)^2(2x + 1)$$

x		-2 *		$-\frac{1}{2}$		1 *	
y'	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↘		↘	min نسبی	↗		↗

$\rightarrow x = -\frac{1}{2}$ min نسبی

$\left|-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = 0$ ←

اختلاف طول ها برابر صفر است!