D S

رادمهر معتمدی — ۲۰ آفرین کامل نوشتی! — تکلیف ۳ — دوازدهم پسر B

۱) ۲

$$y=\frac{x^2+x+2}{x-1} \to xy-y=x^2+x+2 \Rightarrow x^2+(1-y)x+y+2=0$$

$$\to x=\frac{y-1\pm\sqrt{(1-y)^2-4y-8}}{2} \to \Delta\ge 0 \to y^2-2y+1-4y-8\ge 0$$

$$y^2-6y-7=(y+1)(y-7)\ge 0 \quad \begin{array}{ccccc} & -1 & & 7 & \\ + & \vert & - & \vert & + \end{array} \to y\in(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$$

۲) ۲

الف) $2x^2-5x+1=y \to y\in[\min,+\infty)$

$$\min=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(-5)^2+4(2)(1)}{8}=-\frac{17}{8} \quad\Bigg\}\quad y\in[-\frac{17}{8},+\infty)$$

ب) $y=\sqrt{-x^2+6x-5} \to y\in\sqrt{(-\infty,\max]} \to y\in[0,\sqrt{\max}]$

$$\max=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-6^2+4(-1)(-5)}{4(-1)}=4 \to y\in[0,2]$$

ج) $y=\sqrt{x^7-3x^2+4x+1}$ ← چندجمله‌ای درجهٔ فرد: $\mathbb{R} \to y\in[0,+\infty)$

$y=\sqrt{\mathbb{R}}$

د) $y=\log(x^3-6x^2+7x+4)$ ← چندجمله‌ای درجهٔ فرد: $\mathbb{R} \to y\in\mathbb{R}$

$\log:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

۳) ۲

الف) $y=\dfrac{3x+1}{2x-6} \to y\in\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\} \to y\in\mathbb{R}-\{\frac{3}{2}\}$

ب) $y=\sqrt{\dfrac{4x+1}{x-2}} \to y\in\sqrt{\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}} \to y\in[0,2)\cup(2,+\infty)$

ج) $y=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x^2+3}}=\underbrace{\sqrt{x^2+3}}_{\text{اکیداً صعودی برای } x\ge 0}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ ← کمترین مقدار $x=0$ ← $y\ge\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$y\in[\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty)$

د) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2+4}+4-4 \to y=\underset{a\ge 4}{a}+\dfrac{1}{a}-4 \to y\ge 4+\dfrac{1}{4}-4 \to y\ge\dfrac{1}{4}$

$[\frac{1}{4},+\infty)$

رادمهر معتمدی

۴) ۲

$$y = \frac{3x^2+4}{x^2-1} \longrightarrow \square = x^2 \in [0,+\infty) \longrightarrow x=0 \longrightarrow y=-4$$
$$\longrightarrow (x \to +\infty) \longrightarrow y = 3 \quad \Big\} \; y \in (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$$

ریشه دارد

$$y = \frac{3x^2+4}{x^2-1} \longrightarrow x^2 = \frac{y+4}{y-3} \geq 0 \quad \begin{array}{ccccc} & -4 & & 3 & \\ + & & - & & + \end{array} \longrightarrow y \in (-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$$

۵) ۳

$$y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 3} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \sin x = -1 \longrightarrow y = \frac{-3}{2} \\ \sin x = 1 \longrightarrow y = \frac{1}{4} \end{array}\right\} y \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right]$$

$$\longrightarrow \sin x = \frac{3y+1}{2-y} \longrightarrow -1 \leq \frac{3y+1}{2-y} \leq 1 \longrightarrow -1 \leq \frac{3y+1}{y-2} \leq 1$$

$$\longrightarrow \frac{3y+1}{y-2} - 1 = \frac{2y+3}{y-2} \leq 0 \longrightarrow y \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$\longrightarrow \frac{3y+1}{y-2} + 1 = \frac{4y-1}{y-2} \geq 0 \longrightarrow y \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup (2, +\infty) \quad \Big\} \; y \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right]$$

۶) ۳

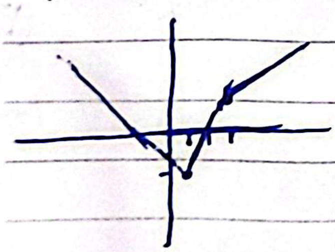
$$y = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4}}{x^2 - x + 1} = \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \longrightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$\longrightarrow y = \frac{\square}{\square + \frac{3}{4}} \longrightarrow \square \in [0, +\infty) \left\langle \begin{array}{l} \square = 0 \longrightarrow y = 0 \\ \square \to +\infty \longrightarrow y = 1 \end{array} \right\} y \in [0, 1)$$

۷) ۲

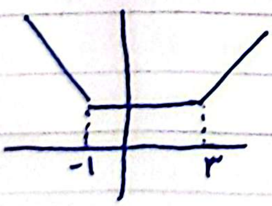
$$y = |2x-2| - |x-3| \begin{cases} x+1 & ; x \geq 3 \\ 3x-5 & ; 1 \leq x \leq 3 \\ -x-1 & ; x \leq 1 \end{cases} \longrightarrow y \geq -2$$

$$y \in [-2, +\infty)$$



$$y = |x-3| + |x+1| \begin{cases} 2x-2 & ; x \geq 3 \\ 4 & ; -1 \leq x \leq 3 \\ -2x+2 & ; x \leq -1 \end{cases} \longrightarrow y \geq 4$$

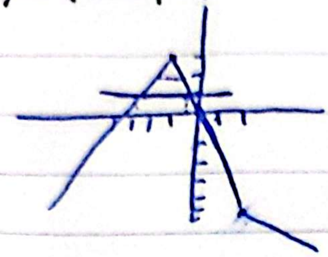
$$y \in [4, +\infty)$$



رادمهر حقیقی

۸) ۲

$y=|x-۲|-|۲x+۲| \geq ۱$

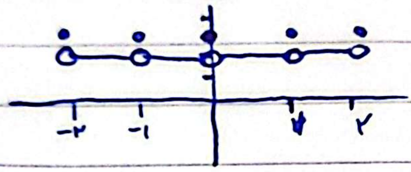


$y=۱ \longrightarrow x_۱=-\frac{۱}{۳}$

$\quad \hookrightarrow x_۲=-۳ \longrightarrow x\in(-\infty,-۳]\cup[-\frac{۱}{۳},+\infty)$

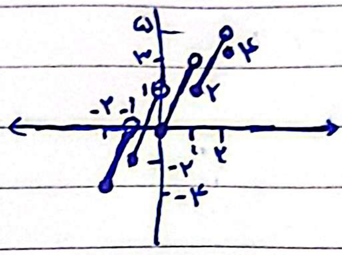
۹) ۲

الف) $y=[x]+[۳-x]=۳+[x]+[-x]$



$\longrightarrow y\in\{۳,۲\}$

ب) $y=۳x-[x]$



$y\in[-۴,۵)$

۱۰) ۲

الف) $y=\sin^۲x-\sin x+۱ \longrightarrow \sin x=۱\to y=۱$

$\hookrightarrow \sin x=-۱\to y=۳$

$\hookrightarrow \sin x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۱}{۲}\to y=\frac{۳}{۴}$

$y\in[\frac{۳}{۴},۳]$

ب) $y=\sin^۴x+\sin^۲x+۱ \longrightarrow \sin^۲x=۱\to y=۳$

$\hookrightarrow \sin^۲x=۰\to y=۱$

$\hookrightarrow \sin^۲x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱}{۲}$ ✗

$y\in[۱,۳]$