به نام خدا

ماهان نژادکرد ۱۹,۷۵

تکلیف ۳

دوازدهم پسر B

آفرین خیلی کامل نوشتی!

۱- (۲)

$y = \frac{x^2+x+2}{x-1} \Rightarrow yx - y = x^2+x+2 \Rightarrow x^2 + x(1-y) + 2+y = 0$

$\xrightarrow{\text{روش } \Delta} x = \frac{y-1 \pm \sqrt{(1-y)^2 - 4(2+y)}}{2} \Rightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow 1+y^2-2y-4y-8 \geq 0$

$y^2 - 6y - 7 \geq 0$

-1		7	
$+$	$-$		$+$

$\Rightarrow R_f = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$

۲- (۲)

الف) $y = 2x^2 - 5x + 1 \xrightarrow{a>0} y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-17}{8}$

$\Rightarrow R_f = [-\frac{17}{8}, +\infty)$

ب) $y = \sqrt{-x^2+6x-5}$

$a<0, \ y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-16}{-4} = +4$

$\Rightarrow -\infty < -x^2+6x-5 \leq +4 \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{-x^2+6x-5} \leq 2$

$R_f = [0, 2]$

ج) $y = \sqrt{x^7 - 2x^2 + 4x + 1}$ $R_f = [0, +\infty)$

چون بزرگترین توان x فرد است پس برد عبارت زیر رادیکال برابر $\mathbb{R}$ است و کل وقتی زیر رادیکال [illegible] تغییر می‌کند

$-\infty < x^7 - 2x^2 + 4x + 1 < +\infty \xrightarrow{\text{جذر}} \sqrt{x^7 - 2x^2 + 4x + 1} < +\infty$

د) $\log(x^3 - 6x^2 + 7x + 4)$ $-\infty < x^3 - 6x^2 + 7x + 4 < +\infty$ با توجه به توضیحات بالا:

$-\infty < \log(x^3 - 6x^2 + 7x + 4) < +\infty \Rightarrow R_f = \mathbb{R}$

۳ـ ۲

الف) $y = \dfrac{۳x+1}{۲x-۶} \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\} = \mathbb{R} - \{\frac{۳}{۲}\}$

حل: $x = \dfrac{۶y+1}{۲y-۳} \to ۲y-۳ \neq ۰ \to y \neq \frac{۳}{۲} \to R_f = \mathbb{R} - \{\frac{۳}{۲}\}$

ب) $y = \sqrt{\underbrace{\dfrac{۴x+1}{x-۲}}_{g(x)}} \qquad g(x) = \dfrac{۴x+1}{x-۲} \Rightarrow R_g = \mathbb{R} - \{\frac{a}{c}\} = \mathbb{R} - \{۴\}$

$\to \left.\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{g(x)} \\ -\infty < g(x) < +\infty \\ g(x) \neq ۴ \end{array}\right\} R_f = [۰, +\infty) - \{۲\}$

ج) $y = \dfrac{x^2+۴}{\sqrt{x^2+۳}} = \dfrac{x^2+۳+1}{\sqrt{x^2+۳}} = \sqrt{x^2+۳} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+۳}}$

$\sqrt{x^2+۳} \geq ۲ \to y_{min} = \sqrt{۳} + \dfrac{1}{\sqrt{۳}} = \dfrac{۴}{\sqrt{۳}} = \dfrac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

$\to R_f = [\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}, +\infty)$

د) $x^2+۴ + \dfrac{1}{x^2+۴} - ۴$

$x^2+۴ \geq ۴ \Rightarrow y_{min} = ۴ + \frac{1}{۴} - ۴ = \frac{1}{۴} \to R_f = [\frac{1}{۴}, +\infty)$

if $a>۰ \quad a + \frac{1}{a} \geq ۲$

if $a<۰ \quad a + \frac{1}{a} \leq -۲$

سوالات ج و د با این نکته حل شدند:

۴ـ ۲

$y = \dfrac{۳x^2+۴}{x^2-1} \to x^2 = \dfrac{y+۴}{y-۳} \Rightarrow \dfrac{y+۴}{y-۳} \geq ۰$

	-۴		۳	
$+$	۰	$-$	‖	$+$

$R_f = (-\infty, -۴] \cup (۳, +\infty)$

حل: $x^2 \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} x^2 = ۰ \Rightarrow y = \dfrac{۰+۴}{۰-1} = -۴ \\ x^2 = +\infty \to y = \lim\limits_{x^2 \to +\infty} \dfrac{۳x^2+۴}{x^2-1} = ۳ \end{cases} \Big\} R_f = (-\infty, -۴] \cup (۳, +\infty)$

چون [illegible]

۲ ۵_

$$y=\frac{2\sin x-1}{\sin x+3} \to \sin x=-\frac{(3y+1)}{y-2} \to 1\geq\frac{3y+1}{y-2}\geq -1$$

$$0\leq\frac{3y+1}{y-2}+1=\frac{4y-1}{y-2}$$

	$\frac{1}{4}$		2	
$+$	0	$-$	ن	$+$

$$\to (-\infty,\tfrac{1}{4}]\cup(2,+\infty) \quad \mathrm{I}$$

$$\frac{3y+1}{y-2}-1\leq 0 \to \frac{2y+3}{y-2}\leq 0$$

	$-\frac{3}{2}$		2	
$+$	0	$-$	ن	$+$

$$\to [-\tfrac{3}{2},2) \quad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I},\mathrm{II}: R_f=[-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{4}]$$

راه ۲: $-1\leq \sin x\leq 1 \to \begin{cases} \sin x=1 \to y=\frac{2-1}{1+3}=\frac{1}{4} \\ \sin x=-1 \to y=\frac{-2-1}{-1+3}=\frac{-3}{2} \end{cases}$

$$\sin x+3\neq 0 \to R_f=[-\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{4}]$$

۴ ۶_

$$f(x)=\frac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1} \to x^2-x+1\neq 0 \quad \Delta=1-4=-3<0$$

$$\boxed{D_f=\mathbb{R}}$$

$$f(x)=\frac{x^2-x+1-\frac{3}{4}}{x^2-x+1}=1-\frac{3}{4(x^2-x+1)}$$

$$\frac{3}{4}\leq x^2-x+1 \Rightarrow 0<\frac{1}{x^2-x+1}\leq\frac{4}{3} \to 0<\frac{3}{4(x^2-x+1)}\leq 1$$

$$1>1-\frac{3}{4(x^2-x+1)}\geq 0$$

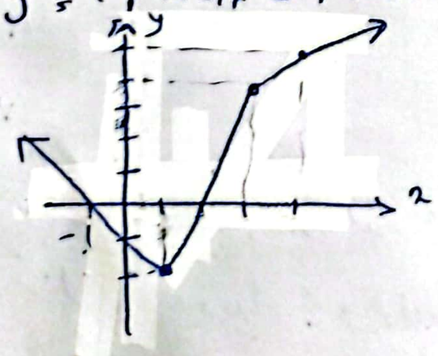
$$R_f=[0,1)$$

۲ ۷_

الف)

$$y=2|x-1|-|x-3|$$

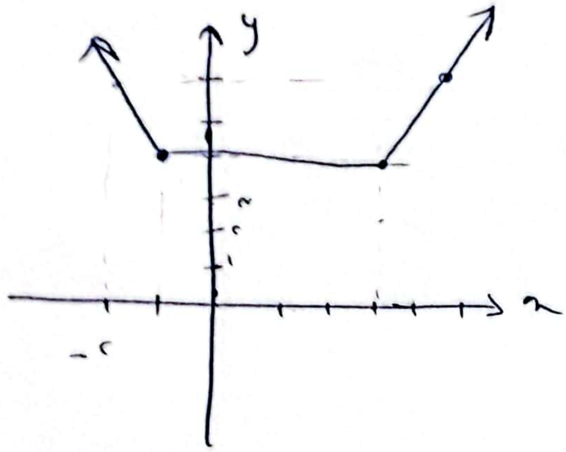
	1		3	
$-x-1$		$3x-5$		$x+1$



$$R_f=[-2,+\infty)$$

ب) $|x-2|+|x+1|$

$$\begin{array}{c|c|c} & -1 & 2 \\ \hline -2x+2 & 4 & 2x-2 \end{array}$$

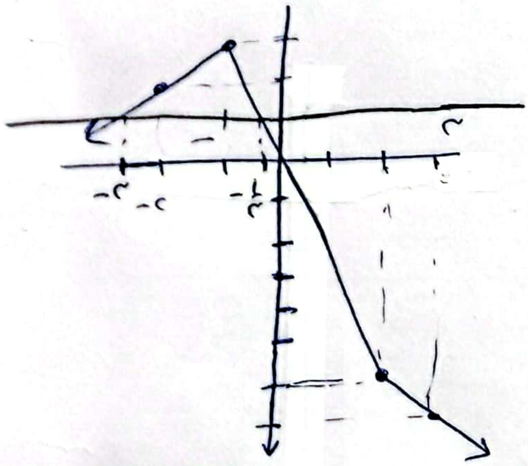


$R_f=[4,+\infty)$

۸- ۲

$|x-2|-3|x+1|\leq 1$

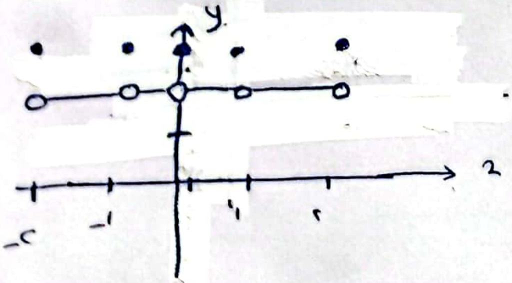
$$\begin{array}{c|c|c} & -1 & 2 \\ \hline 4+x & -3x & -x-4 \end{array}$$



$y=1 \Rightarrow \begin{array}{l} x\leq -3 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{array} \rightarrow (-\infty,-3]\cup[-\frac{1}{2},+\infty)$

۹- ۱/۷۵

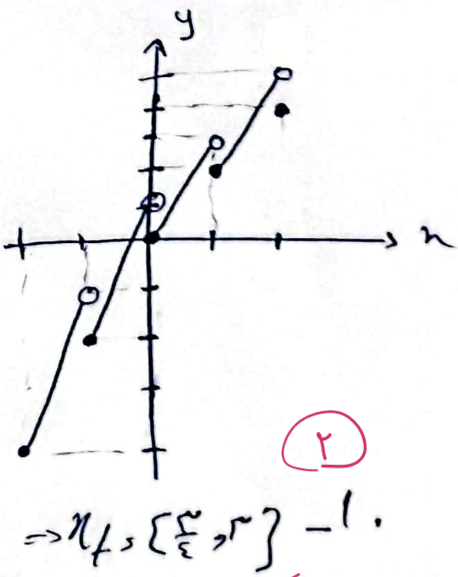
الف) $[x]+[2-x]=[x]+[-x]+2=\begin{cases} 2 & x\in\mathbb{Z} \\ 1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$



$R_f=\{1,2\}$

ب) $y=3x-[x]=\begin{cases} 2x+3 & -2\leq x<-1 \\ 3x+1 & -1\leq x<0 \\ 3x & 0\leq x<1 \\ 3x-1 & 1\leq x<2 \\ 4 & x=2 \end{cases}$

$\hookrightarrow R_y=[-4,5)$



۱۰- ۲

الف) $y=\sin^2 x-\sin x+1 \rightarrow \begin{cases} \sin x=-1 \Rightarrow y=3 \\ \sin x=+1 \Rightarrow y=1 \\ \sin x=\frac{1}{2} \rightarrow y=\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow R_f=\{\frac{3}{4},3\}$

ب) $y=\sin^4 x+\sin^2 x+1 \rightarrow \begin{cases} \sin^2 x=1 \rightarrow y=3 \\ \sin^2 x=0 \rightarrow y=1 \\ \sin^2 x=-\frac{1}{2} \times \end{cases} \rightarrow R_f=\{1,3\}$