مهدی کرسپانی - تکلیف شماره ۳

①

$y = \frac{x^۲+x+۲}{x-۱} \Rightarrow xy-y = x^۲+x+۲ \Rightarrow x^۲+(۱-y)x+۲+y = ۰$

$\Rightarrow x = \frac{y-۱ \pm \sqrt{۱+y^۲-۲y-۸-۴y}}{۲} = \frac{y-۱ \pm \sqrt{y^۲-۶y-۷}}{۲} \Rightarrow$ $\nearrow (y-۷)(y+۱) \geq ۰$

$\Rightarrow (y-۷)(y+۱) \geq ۰$

$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -۱ & & ۷ & \\ \hline + & | & - & | & + \end{array} \Rightarrow (\infty-, -۱] \cup [۷, +\infty) = R_f$

---

②

الف) $\frac{-b}{۲a} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow ۲(\frac{۵}{۴})^۲ - ۵(\frac{۵}{۴}) + ۱ = \frac{-۱۷}{۸} \Rightarrow R_f = [\frac{-۱۷}{۸}, +\infty)$

ب) $\frac{-b}{۲a} = \frac{-۶}{-۲} = ۳ \Rightarrow -۹+۱۸-۵ = ۴ \Rightarrow R_f = [۰, ۲]$

ج) بزرگ‌ترین توان فرد $\Rightarrow R_f = [۰, +\infty)$

د) بزرگ‌ترین توان فرد $\Rightarrow R_f = (-\infty, +\infty)$

---

③

الف) $\frac{۳x+۱}{۲x-۶} \Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{\frac{۳}{۲}\}$

ب) $R_f = \sqrt{\mathbb{R} - \{۴\}} \Rightarrow R_f = [۰, +\infty) - \{۲\}$

ج) $\frac{x^۲+۳}{\sqrt{x^۲+۳}} + \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}} \xrightarrow{\text{مساوی } +} \sqrt{x^۲+۳} + \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۳}} \Rightarrow R_f = [\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}, +\infty)$

د) $x^۲+۴ + \frac{۱}{x^۲+۴} - ۴ = y \xrightarrow{t = x^۲+۴} (t + \frac{۱}{t}) - ۴ \Rightarrow \quad \Rightarrow$

$x = ۰$

$\longrightarrow$ عبارت $\geq \frac{۱۷}{۴} \Rightarrow R_f = [\frac{۱}{۴}, +\infty)$

$(\infty-, -۲] \cup [۲, +\infty)$

---

④

$yx^۲ - y = ۳x^۲+۴ \Rightarrow yx^۲ - ۳x^۲ = ۴+y \Rightarrow x^۲ = \frac{۴+y}{y-۱} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{۴+y}{y-۳}} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -۴ & & ۳ & \\ \hline + & | & - & | & + \end{array}$

$R_f = (\infty-, -۴] \cup (۳, +\infty)$

کوچک‌ترین حالت $\Rightarrow x^۲ = ۰ \Rightarrow -۴$

بزرگ‌ترین $\Rightarrow x^۲ = \infty \Rightarrow ۳$

$\Rightarrow R_f = (\infty-, -۴] \cup (۳, +\infty)$

---

⑤

$y\sin x + ۳y = ۲\sin x - ۱ \Rightarrow y\sin x - ۲\sin x = -۳y-۱ \Rightarrow \sin x = \frac{-۳y-۱}{y-۲} \Rightarrow -۱ \leq \frac{-۳y-۱}{y-۲} \leq ۱$

$۰ \leq \frac{-۲y-۳}{y-۲} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -\frac{۳}{۲} & & ۲ & \\ \hline - & | & + & | & - \end{array} \Rightarrow \frac{-۴y+۱}{y-۲} \leq ۰ \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & \frac{۱}{۴} & & ۲ & \\ \hline - & | & + & | & - \end{array} \Rightarrow y = [-\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۴}]$

کمترین $\nearrow \sin x = -۱ \Rightarrow \frac{-۳}{۴}$

بیشترین $\searrow \sin x = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۴}$

$\Rightarrow [-\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۴}] = R_f$

⑥

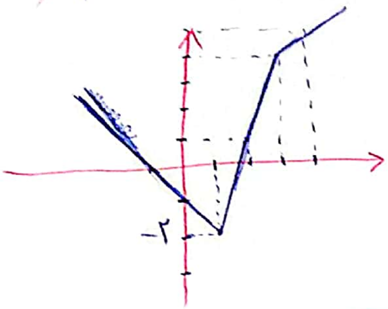
$$\frac{x^۲-x+\frac{۱}{۴}}{x^۲-x+۱-\frac{۳}{۴}+\frac{۳}{۴}} = \frac{(x-\frac{۱}{۲})^۲+۰}{(x-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}} \Rightarrow (x-\frac{۱}{۲})^۲ \begin{cases} \text{ب} \to ۱ \\ \text{ک} \to ۰ \end{cases} \Rightarrow R_f = ~~\mathbb{Q}~~ [۰,۱)$$

$D_f \Leftarrow$ مخرج همواره + است $\to D_f = \mathbb{R}$

---

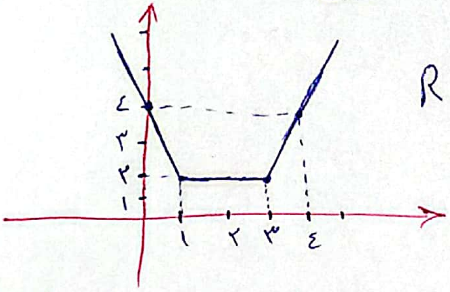
⑦

الف) $|۲x-۲|-|x-۳|$



$\Rightarrow R_f = [-۲,+\infty)$

ب) $|x-۳|+|x+۱| \to$ گلدونی



$R = [۲,+\infty)$

---

⑧

-۱ | ۲

$-x+۲+۲x+۲$ | $-x+۲-۲x-۲$ | $x-۲-۲x-۲$

$x+۴ \leq ۱$ | $-۳x \leq ۱$ | $-x-۴ \leq ۱$

$\Downarrow$ | $\Downarrow$ | $\Downarrow$

$x \leq -۳$ ✓ | $x \cancel{\geq} -\frac{۱}{۳}$ | $x \geq ۵$ ✓

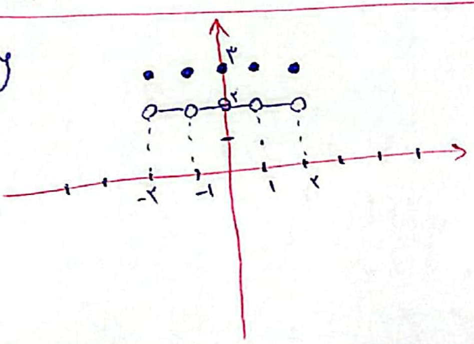
$\Rightarrow x = (-\infty, -۳] \cup [-\frac{۱}{۳}, ۲] \cup [۵, +\infty)$

---

⑨

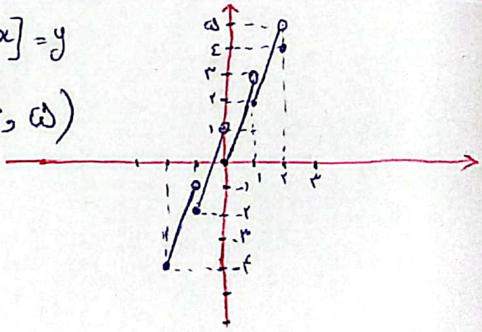
الف) $[x]+[۳-x]=y$

$R = \{۲,۳\}$



ب) $۳x-[x]=y$

$R = [-۴, ۵)$



---

⑩

الف) $\sin x \begin{cases} ۱ \to ۱ \\ -۱ \to ۳ \\ \frac{-b}{۲a} = \frac{+۱}{۲} \to \frac{۳}{۴} \end{cases} \Rightarrow R = [۱,۳]$

ب) $\sin^۲ x \begin{cases} ۰ \to ۱ \\ ۱ \to ۳ \\ \frac{-b}{۲a} = \frac{-۱}{۲} \;\times \end{cases} \Rightarrow R = [۱,۳]$