۱۸,۷۵

-۱

$D_f: x-1>0 \to \boxed{x>1}$ ①
$\log_2^{x-1} \ge 0 \to x-1 \ge 1 \to \boxed{x \ge 2}$ ②

$D_g: -(x^2-4x+4) \ge 0 \to (x-2)^2 \le 0 \to \begin{array}{c} 2 \\ + \ \phi \ + \end{array} \to \boxed{x=2} \xrightarrow{gof(x)} \sqrt{\log_2^{x-1}}=2 \to \log_2^{x-1}=4$ ۲

$\to x-1=16 \to x=17$ ③ $\xrightarrow{①,②,③} D_{gof}=\{17\}$

-۲

$fog(x)=gof(x) \to \underbrace{2(x^2-3x+8)-5}_{2x^2-6x+11} = \underbrace{(2x-5)^2-3(2x-5)+8}_{=4x^2-26x+48} \to 2x^2-20x+37=0$ ۲

ریشه‌ها: $\alpha,\beta \to \alpha^2+\beta^2=S^2-2P=100-2(\frac{37}{2})=63$

-۳

$g(f(x))=5x^2+7$
$f(x)=2x$

$\to g(2x)=5x^2+11 \to g(x)=5(\frac{x}{2})^2+11=\boxed{\frac{5x^2+44}{4}=g(x)} \to g(x-7)=\frac{5(x-7)^2+44}{4}$ ۲

$=\frac{5x^2-70x+289}{4} \xrightarrow{\min} -\frac{b}{2a}=\frac{70}{10}=7 \to \frac{(5\times49)-(70\times7)+289}{4}=\frac{44}{4}=11$

-۴

$\left.\begin{array}{l} f(x)=3x-4 \\ f(g(x))=3x^2-6x-1 \end{array}\right\} \to f(g)=3g-4=3x^2-6x-1 \to 3g=3x^2-6x+3 \to g(x)=x^2-2x+1$

$\to gof(x)=(3x-4)^2-2(3x-4)+1=9x^2-24x+16-6x+8+1=9x^2-30x+25$ ۲

-۵ ۱,۷۵

حل $\Rightarrow f-g=-x+5 \xrightarrow[g=1.5f-7]{2g=3f-14} f-1.5f+7=5-x \to -0.5f=-x-2 \to \boxed{f(x)=2x+4}$

$\to \boxed{g(x)=3x-1} \to fog(x)=2(3x-1)+4=\underline{6x+2} \to 6x-2=0 \to 6x=2 \to x=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=a$

$\frac{2}{a}x-2=6x+2 \to -\frac{2}{a}x=6x \to a=-\frac{1}{3}$

-۶

$fog(x)=9^{\log_3^x}=x^{\log_3^9}=\boxed{x^2}$, $gof(x)=\log_3^{9^x}=x\log_3^9=\boxed{2x}$

$\to fog \le gof \Rightarrow 2x \ge x^2 \to x^2-2x \le 0 \to x(x-2) \le 0 \to \begin{array}{ccc} 0 & & 2 \\ + \ \phi & - & \phi \ + \end{array}$ ۲

$\left.\begin{array}{l} D_g: x>0 \\ D_f=\mathbb{R} \end{array}\right\}$ ② $\xrightarrow[\text{اشتراک}]{①,②}$ جواب: $(0,2] \to$ اعداد طبیعی: $\{1,2\}$ $\leftarrow [0,2]$ ①

کامران ایزی

۷-

$$f\left(\frac{x^2-2}{x}\right)=f\left(x-\frac{2}{x}\right)=\underbrace{x^2+x-4-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}_{\left(x-\frac{2}{x}\right)^2}=\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+\left(x-\frac{2}{x}\right)\rightarrow \boxed{f(x)=x^2+x}$$

۲

۸-

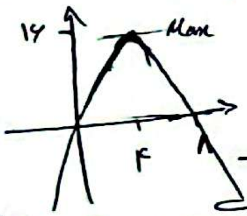
$f(x)=\log_2^x$

$g(x)=8x-x^2$

$\left\{\boxed{fog(x)=\log_2^{-x^2+8x}}\right.$

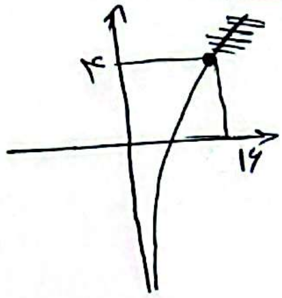
$D_{fog}: -x^2+8x>0 \rightarrow$ 0 − + − 8 $\rightarrow D_{fog}=(0,8)$ A

۲



← منحنی داده شده در بازه‌ی (۰،۸) بین ۰ و ۱۶ متغیر است یعنی برد آن در دامنه‌ی مورد نظر برابر با $(0,16]$ است

ضابطه‌ی $\log_2^x$ را می‌کشیم به طوری که $0<x\le 16$ باشد. برد ضابطه در این بازه برابر با برد تابع fog یا همان مجموعه‌ی B است



$\rightarrow R_{fog}=(-\infty,4]$ B

$\Rightarrow A\cap B=(0,4]$

۹-

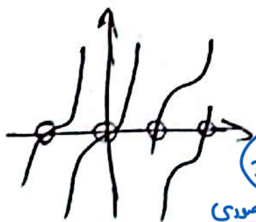
$h(g(x))=(x-1)^3+2(x-1)+1=x^3-3x^2+5x-2$

$fof(x)=f(f)=1-3f^2 \xrightarrow{f(x)=a} f(a)=1-3a^2 \Rightarrow \boxed{f(x)=1-3x^2}$

$h(g(x))=f(x)\rightarrow 1-\cancel{3x^2}=x^3-\cancel{3x^2}+5x-2\rightarrow x^3+5x-3=0\rightarrow$

هر معادله‌ی درجه سومی همیشه یک ریشه دارد پس تعداد ریشه‌ها سوال یکی

۲



→ همه یک ریشه دارند

$x^3=-5x+3$

صعودی

★ به شرط اینکه اکیداً صعودی باشد

۱۰-

$g(3)=8 \xrightarrow[gof=8]{if\ f(x)=3} f(x)=3\rightarrow x-\frac{4}{x}=3\rightarrow \boxed{x=4}\rightarrow g(f(4))=8=a\times 4^3+8$

$\rightarrow 64a+8=8\rightarrow 64a=0\rightarrow a=0$

۱

$x-\frac{4}{x}=3\rightarrow x^2-3x-4=0$, $x=4$, $x=-1$

$-a-2=+8\rightarrow a=-10$

کامیار امینی