

19, 20

نام و نام خانوادگی نام پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ۱۰۰ کلاس ۱۱۸

الف) $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow n^2 - n = 2, n \leq 2 / m \leq 3$ $(3, 2), (3, n^2 - n), (m, 2)$ ب) $(2, 3), (m, 3) \Rightarrow m \leq 2$ $(a, 2-1) (-1, 1) \Rightarrow a \leq -1$ $(-1+2, n) (1, 2) \Rightarrow n \leq 2$	۱
$f(x) = \begin{cases} 3x-1; x \geq 1 \\ x+a; x < 1 \end{cases}$ $\xrightarrow{x=1}$ $3(1)-1=2$ $1+a < 2 \Rightarrow a < 1$	۲
$f(x) = \begin{cases} 3x-1; x \geq 1 \\ ax+a-1; x \leq 0 \end{cases}$ $3(1)-1=2 \rightarrow R = [2, +\infty)$ $ax+a-1 \rightarrow R = (-\infty, a-1]$ $a-1 < 2 \Rightarrow a < 3$ و باید $a > 0$ تا تابع صعودی باشد و تابع یک به یک شود. همچنین $a \neq 0$ به دلیل اینکه اگر $a = 0 \Rightarrow y = -1$ و یک تابع ثابت می شود که یک به یک نیست. $\Rightarrow a < 3 \cap a > 0 \cap a \neq 0 = 0 < a < 3$	۳
الف) $y_1 = x_1^3 + 2, y_2 = x_2^3 + 2 \rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2, x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$ $x^3 = y-2, x = \sqrt[3]{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ ب) تابع معکوس یک به یک می باشد در نتیجه یک به یک نمی باشد.	۴
الف) $y = \frac{3x+1}{x-2} \rightarrow -2 \neq 1 \Rightarrow$ تابع معکوس افکند است و یک به یک می باشد. $y \neq -2, y = \frac{3x+1}{x-2} \rightarrow x(y-3) = 1+2y \rightarrow x = \frac{1+2y}{y-3}$ و $f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-3}$ ب) $y = \frac{2(x-3)}{x-2} \Rightarrow y = 2 \rightarrow$ تابع یک به یک نیست.	۵

$$y_1 = y_2 \rightarrow \sqrt{x_1 - 3} = \sqrt{x_2 - 3} \rightarrow x_1 - 3 = x_2 - 3, x_1 = x_2 \checkmark$$

$$y = \sqrt{x-3} \rightarrow y^2 = x-3, x = y^2+3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2+3$$

۳

ب) تابع یک به یکی است اما بدلیل اینکه دامنه داده شده است فقط یک است معرود x ها است تابع یک به یکی باشد.

$$y = x^2 - 4x + 3 \rightarrow y = (x-2)^2 - 1 \rightarrow (x-2)^2 = y+1, x-2 = \pm\sqrt{y+1}, x = \pm\sqrt{y+1} + 2$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 2$$

لر به علت دامنه داده شده است مثبت آن را در نظر می گیریم.

$$y = (\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} \rightarrow \Delta: 1+4y, \sqrt{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y}}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2} \right)^2$$

$$x = \frac{1+1+4y-2\sqrt{1+4y}}{4} = \frac{2+4y-2\sqrt{1+4y}}{4} = \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2}\sqrt{1+4y} \Rightarrow f^{-1}(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4x}$$

$$ax+b-\sqrt{x-c} = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x+\frac{1}{2}} \Rightarrow a=1, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{2}$$

$$a+2b+c = 1+2(\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

۱,۵

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2-2} = \frac{x_2}{x_2^2-2} \rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2} \rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-2} - \frac{x_2^2}{x_2^2-2} = \frac{x_1^2}{x_1^2-2} - \frac{x_2^2}{x_1^2-2} - \frac{x_2^2}{x_2^2-2} + \frac{x_2^2}{x_1^2-2}$$

$$-2x_1^2 = -2x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y^2 = \frac{x^2}{x^2-2} \rightarrow y^2 x^2 - 2y^2 = x^2 \rightarrow x^2(y^2-1) = 2y^2 \rightarrow x^2 = \frac{2y^2}{y^2-1}, x = \pm \sqrt{\frac{2y^2}{y^2-1}}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{x^2-1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-1}}$$

۸

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x} & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{معکوس}} x = \frac{y}{y+1} \rightarrow y(x+1) = y, y(x-1) = -x, y = \frac{x}{1-x}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} x = \frac{y}{1-y} \rightarrow x-yx = y, y(1+x) = x, y = \frac{x}{1+x}$$

$$g^{-1}(x) \rightarrow \sqrt{x} = y+1 \Rightarrow x = (y+1)^2, g^{-1}(x) = (x+1)^2$$

$$f(-\frac{1}{\omega}) + g^{-1}(-\frac{1}{\omega}) = \frac{-\frac{1}{\omega}}{-\frac{1}{\omega}+1} + (-\frac{1}{\omega}+1)^2 = \frac{-1}{1-\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{-1+\omega}{\omega^2}$$

۲

۹

$$y = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow y^3 = x-1 \Rightarrow x = y^3+1, f(x) = x^3+1$$

$$g(x) = x^3+1 + \sqrt{x^3+1} \quad g^{-1}(12) \Rightarrow g(x) = 12 \rightarrow x^3+1 + \sqrt{x^3+1} = 12$$

$$(\sqrt{x^3+1})^2 + \sqrt{x^3+1} - 12 = 0 \rightarrow \sqrt{x^3+1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \sqrt{x^3+1} = 3 \quad \begin{matrix} \text{نمی قابل } \\ \text{منفی} \end{matrix}$$

$$\sqrt{x^3+1} = 3, x^3+1 = 9, x^3 = 8, x = 2 \Rightarrow g^{-1}(12) = 2$$

۳

۱۰