درسا صادقی

19,5

سوال ۱)

الف) $f=\{(3,2),(n,5),(3,n^2-n),(m,2),(-1,4)\}$

(۲)

$m=3$

$n^2-n=2 \longrightarrow n^2-n-2=0 \longrightarrow (n-2)(n+1)=0 \longrightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=-1 \end{cases}$

غیرقابل قبول

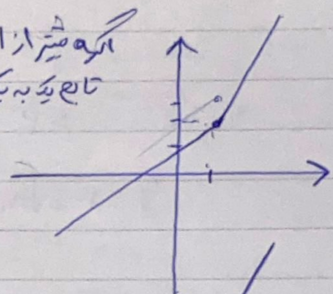
ب) $f=\{(-1,1),(1,2),(2,3),(a,m-1),(a+2,n),(m,3)\}$

$a=-1 \quad n=2$

$m=2$

۲)

اگه بیشتر از ۱ باشد تابع یک به یک نمی‌شود



بیشترین مقدار a

$a\in(-\infty,1]$

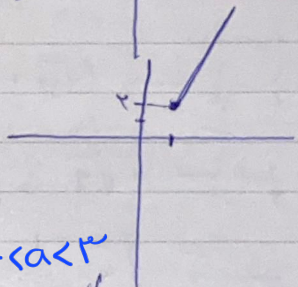
$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\geq 1 \\ x+a & x<1 \end{cases}$$

(۲)

۳)

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x\geq 1 \\ ax+a-1 & x\leq 0 \end{cases}$$

$a>0$



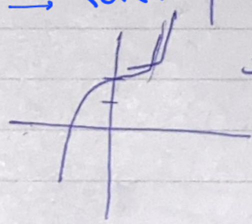
باید کوچکتر از ۲ باشد تا تابع یک به یک شود

$a-1<2 \longrightarrow a<3 \longrightarrow 0<a<3$

(۱,۵)

۴)

الف) $y=x^3+2 \longrightarrow$



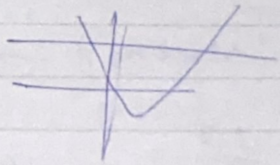
یک به یک است

$\left.\begin{array}{l} y=x_1^3+2 \\ y=x_2^3+2 \end{array}\right\} \sqrt[3]{x_1^3}=\sqrt[3]{x_2^3}$

$x_1=x_2$

(۲)

$x=y^3+2 \longrightarrow y^3=x-2 \longrightarrow y=\sqrt[3]{x-2}$



ب) $y=x^2-4x+2 \longrightarrow$ دو ریشه دارد پس یک به یک نیست

۵)

الف) $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$

$x=\dfrac{2y+1}{y-2} \longrightarrow xy-2x=2y+1$

$(x-2)y=2x+1$

$y=\dfrac{2x+1}{x-2}$

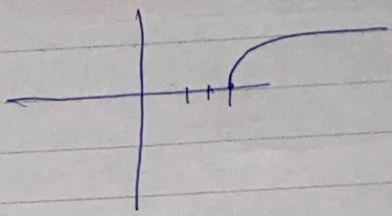
توابع هموگرافیک یک به یک هستند

(۲)

ب) $y=\dfrac{2x+4}{x+2}=\dfrac{2(x+2)}{x+2}=2 \longrightarrow$ تابع ثابت است پس یک به یک نیست

درسا صادقی

سوال ۶)



الف) $y=\sqrt{x-3}$

$\left(x=\sqrt{y-3}\right)$

$x^2=y-3 \to y=x^2+3$

(۲)

ب) $y=x^2-4x+3 \quad x\in[2,+\infty)$ یک به یک است

$\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$

$y^2-4y+3-x=0 \longrightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{16-4(-x+3)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4x+4}}{2}=2\pm\sqrt{x+1}$

$2\pm\sqrt{x+1}\ge 2$ ← منفی نمی‌شود ، R تابع دوم $=$ D تابع اول

$y=2+\sqrt{x+1}$

سوال ۷)

$f(x)=x+\sqrt{x}$

$f(x)^{-1}=x=y+\sqrt{y}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \longrightarrow (\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \longrightarrow x+\frac{1}{4}=(y+\frac{1}{4})^2$

(۲)

$\sqrt{y}+\frac{1}{2}=\sqrt{x+\frac{1}{4}} \longrightarrow \sqrt{y}=\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2} \longrightarrow y=x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}=$

$x-\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{4} \end{cases}$

$a+2b+4c=1+1-1=1$

سوال ۸)

(۳)

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}\ge 0}$ یک به یک است

$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-4}} \\ y=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-4}} \end{array}\right\} \quad \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-4}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-4}}$

y وارون‌پذیر است

$\frac{x_1^2}{x_1^2-4}=\frac{x_2^2}{x_2^2-4}$

$\cancel{x_1^2x_2^2-4x_1^2=x_2^2x_1^2-4x_2^2}$

$x_1=x_2 \leftarrow \sqrt{x_1^2}=\sqrt{x_2^2}$

$x=\frac{y}{\sqrt{y^2-4}} \longrightarrow x^2=\frac{y^2}{y^2-4} \longrightarrow x^2y^2-4x^2=y^2 \to$

$(x^2-1)y^2=4x^2$

$y^2=\frac{4x^2}{x^2-1} \longrightarrow y=\pm\frac{x\sqrt{4}}{\sqrt{x^2-1}} \longrightarrow y=\frac{x\sqrt{4}}{\sqrt{x^2-1}}$

$\sqrt{x^2-1}\ge 0$ چون x,y وارون هستند

درسا صادق

$\overset{-1}{f}(x) = \dfrac{x}{1+|x|} \qquad g(x) = \sqrt{x} - 1 \qquad f(-\frac{2}{5}) + g^{-1}(-\frac{2}{5}) = -\frac{2}{3} + \frac{9}{25} = \dfrac{-23}{75}$ (۹

$x = \dfrac{y}{1+|y|} \longrightarrow x + |y|x = y \longrightarrow y - |y|x = x \xrightarrow{\text{اگر } y \geq 0} y - yx = x \rightarrow y(1-x) = x$

$y = \dfrac{x}{1-x}$

$y < 0 \longrightarrow y + yx = x \longrightarrow x = y(x+1) \longrightarrow y = \dfrac{x}{x+1}$

$f(x) \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & x \geq 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & x < 0 \end{cases} \longrightarrow f(-\frac{2}{5}) = \dfrac{\frac{-2}{5}}{-\frac{2}{5}+1} = \dfrac{-\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{2}{3}$

۲

$x = \sqrt{y} - 1 \longrightarrow \sqrt{y} = x+1 \longrightarrow y = (x+1)^2 \longrightarrow g^{-1}(x) = (x+1)^2 \longrightarrow g^{-1}(-\frac{2}{5}) = (\frac{3}{5})^2 = \frac{9}{25}$

$\overset{-1}{f}(x) = \sqrt[3]{x-1} \qquad g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ (۶

$g^{-1}(12) = ? \qquad (x = \sqrt[3]{y-1})^3 \longrightarrow x^3 = y-1 \longrightarrow y = x^3+1$

$g(x) = x^3+1+\sqrt{x^3+1} \xrightarrow{g^{-1}(x)} x = y^3+1+\sqrt{y^3+1} \quad \underline{\sqrt{y^3+1} = t}$

۲

$x = t^2+t \longrightarrow t^2+t-x = 0$

$t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4x}}{2} \quad t \geq 0 \longrightarrow t = \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{2}$

$\sqrt{y^3+1} = \left(\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{2}\right)^2 \longrightarrow y^3+1 = \dfrac{4x+1+1-2\sqrt{4x+1}}{4}$

$y^3+1 = \dfrac{2x-\sqrt{4x+1}+1}{2} \longrightarrow y^3 = \dfrac{2x-\sqrt{4x+1}-1}{2}$

$y = \sqrt[3]{\dfrac{2x-\sqrt{4x+1}-1}{2}} \xrightarrow{x=12} g^{-1}(12) = \sqrt[3]{\dfrac{24-\sqrt{4x+1}-1}{2}} =$

$\sqrt[3]{\dfrac{24-7-1}{2}} =$

$\sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

WWW.BONBOOKS.IR