۲۰

ریاضیات یازدهم تجربی شعبه A تکلیف شماره ۱۰

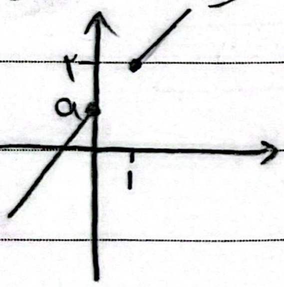
۱) الف) $f=\{(۳,۲),(n,۵),(۳,n^۲-n),(m,۴),(-۱,۴)\}$

$\boxed{m=۳}$ $\quad n^۲-n=۲ \Rightarrow n^۲-n-۲=۰ \Rightarrow (n+۱)(n-۲) \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n=۲} \checkmark \\ n=-۱ \text{ غ ق ق} \end{cases}$

ب) $f=\{(-۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(a,m-۱),(a+۲,n),(m,۳)\}$ ۳

$\boxed{m=۲}$ $\quad m-۱ \Rightarrow ۲-۱=۱ \Rightarrow \boxed{a=-۱}$ $\quad a+۲ \Rightarrow -۱+۲=۱ \Rightarrow \boxed{n=۲}$

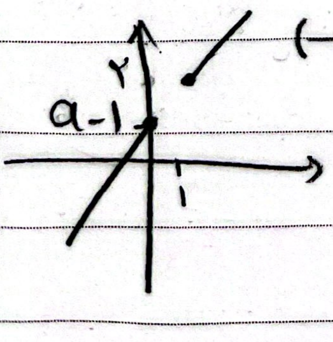
۲) ضابطه‌ی بالایی تابع خطی $y=۳x-۱$ است و برد آن $[۲,+\infty)$ می‌باشد
ضابطه‌ی پایینی هم خطی است و برد این دو تابع اگر بخواهند یک به یک باشند نباید اشتراک داشته باشند ۳



برد $y=x+a$ به ازای $x<۱$ برابر است با $(-\infty,a]$
برای اینکه دو تابع اشتراک نداشته باشند باید $a<۱$ باشد

۳) ضابطه‌ی تابع بالایی خطی $y=۳x-۱$ و برد آن $[۲,+\infty)$ است و ضابطه‌ی پایینی هم تابع خطی است و برد آن اگر بخواهد یک به یک باشد شیب خط $y=ax+a-۱$ نمی‌تواند صفر و منفی باشد $(a>۰)$ و برد این دو ضابطه نباید اشتراکی داشته باشد ۴

برد $y=ax+a-۱$ به ازای $x\leq۰$ برابر است با $(-\infty,a-۱]$



برای اینکه برد دو تابع اشتراک نداشته باشد باید $a-۱<۲$ برقرار باشد

$\begin{cases} a-۱<۲ \Rightarrow a<۳ \\ a>۰ \end{cases} \Rightarrow \boxed{۰<a<۳}$

۴) الف) $y = x^3 + 2$

یک به یک است $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^3 + 2 = x_2^3 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$f^{-1}(x) \Rightarrow x^3 = y - 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-2} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

ج) ضابطه متعلق به یک سهمی است و بنابراین یک به یک نمی‌باشد و تابع معکوس ندارد

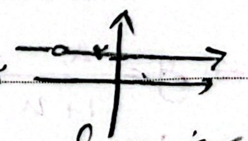
---

۵) الف) تابع هموگرافیک است پس یک به یک است و معکوس پذیر است

$f^{-1}(x) \Rightarrow yx - 2y = 3x + 1 \Rightarrow yx - 3x = 2y + 1 \Rightarrow$

$x(y-3) = 2y + 1 \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-3} \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

ج) $y = \frac{4 + 2x}{x+2} \Rightarrow y = \frac{2\cancel{(2+x)}}{\cancel{x+2}} \Rightarrow y = 2$

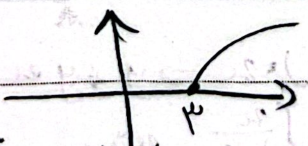


یک به یک نیست و معکوس پذیر نمی‌باشد

---

۶) تابع یک به یک است

الف) $y = \sqrt{x-3}$



$f^{-1}(x) \Rightarrow x = \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y - 3 \Rightarrow y = x^2 + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 3$

ج) $y = x^2 - 4x + 3 \quad , \quad x \in [2, +\infty)$ با توجه به دامنه داده شده یک به یک است

$f^{-1}(x) : x^2 - 4x + 3 + 1 - 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 1 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 1 \Rightarrow$

$x - 2 = \pm\sqrt{y+1} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$

(7)

$\sqrt{x}=t \Rightarrow f(x)=t^2+t \quad f^{-1}(x) \Rightarrow y=t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow (t+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=y \Rightarrow y=(\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \Rightarrow x=(\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x+\frac{1}{4}=(\sqrt{y}+\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \pm\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\sqrt{y}+\frac{1}{2} \Rightarrow +\sqrt{x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}=\sqrt{y}$

$\Rightarrow y=x+\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{4} \end{cases}$

$a+2b+4c \Rightarrow 1+1-1=\boxed{1}$

---

(8)

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \quad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}}$

توان ۲ $\Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-2}=\frac{x_2^2}{x_2^2-2} \Rightarrow x_1^2x_2^2-2x_1^2=x_1^2x_2^2-2x_2^2$

$\Rightarrow x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$

y نمی‌تواند دو x مختلف‌العلامه داشته باشد $\Leftarrow x_1=x_2$

$f^{-1}(x) \Rightarrow x=\frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \Rightarrow x^2=\frac{y^2}{y^2-2} \Rightarrow y^2x^2-2x^2=y^2 \Rightarrow$

$y^2x^2-y^2=2x^2 \Rightarrow y^2=\frac{2x^2}{x^2-1} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{2x^2}{x^2-1}} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2-1}}$

---

(9)

if $x\geq 0 \Rightarrow y=\frac{x}{1+x} \Rightarrow y(1+x)=x \Rightarrow y+yx=x \Rightarrow$

$y=x(1-y) \Rightarrow x=\frac{y}{1-y}$

if $x<0 \Rightarrow y=\frac{x}{1-x} \Rightarrow y(1-x)=x \Rightarrow y-yx=x \Rightarrow y=x(1+y)$

$\Rightarrow x=\frac{y}{1+y}$

$f(x)\begin{cases} \frac{x}{1-x} & x\geq 0 \\ \frac{x}{1+x} & x<0 \Rightarrow f(-\frac{2}{5})=\frac{-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} \Rightarrow -\frac{2}{3} \end{cases}$

$g(x)=\sqrt{x}-1 \Rightarrow y=\sqrt{x}-1 \Rightarrow y+1=\sqrt{x} \Rightarrow x=(y+1)^2 \Rightarrow g^{-1}(x)=(x+1)^2$

$g^{-1}(-\frac{2}{5}) \Rightarrow (-\frac{2}{5}+1)^2=\frac{9}{25} \qquad -\frac{2}{3}+\frac{9}{25}=\boxed{\frac{-23}{75}}$

$$f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x-1} \Rightarrow y^{۳}=x-1 \Rightarrow x=y^{۳}+1$$ (۱۰)

$$\Rightarrow f(x)=x^{۳}+1$$

$$g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}=(x^{۳}+1)+\sqrt{x^{۳}+1} \Rightarrow t=\sqrt{x^{۳}+1}$$

$$\Rightarrow x^{۳}+1=t^{۲} \Rightarrow y=t^{۲}+t \Rightarrow t^{۲}+t-y=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1+۴y}}{۲} \xrightarrow{\sqrt{x^{۳}+1}\geq 0} t=\frac{-1+\sqrt{1-۴y}}{۲}$$

$$\Rightarrow x^{۳}+1=t^{۲} \Rightarrow x^{۳}=t^{۲}-1 \Rightarrow x=\sqrt[۳]{t^{۲}-1}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[۳]{\left(\frac{-1+\sqrt{1+۴y}}{۲}\right)^{۲}-1} \Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt[۳]{\left(\frac{-1+\sqrt{1+۴y}}{۲}\right)^{۲}-1}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(۱۲)=\sqrt[۳]{\left(\frac{-1+\sqrt{۴۹}}{۲}\right)^{۲}-1}=\sqrt[۳]{۸}=\boxed{۲}$$