

۲۰

الف) $f(3) \leq 2 \Rightarrow 3^2 - 3 \leq 2 \Rightarrow 6 \leq 2$ (نادرست)
 $f(m) \leq 2 \Rightarrow m^2 - m \leq 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) \leq 0 \Rightarrow m \in [-1, 2]$
 ب) $f(2) \leq 3 \Rightarrow 2^2 - 2 \leq 3 \Rightarrow 2 \leq 3$ (صحیح)
 $f(m) \leq 3 \Rightarrow m^2 - m \leq 3 \Rightarrow m^2 - m - 3 \leq 0$
 $\Delta = 1 + 12 = 13$
 $m = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$
 $m \in \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right]$
 ج) $f(1) \leq 2 \Rightarrow 1^2 - 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2$ (صحیح)
 $f(-1) \leq 2 \Rightarrow (-1)^2 - (-1) \leq 2 \Rightarrow 2 \leq 2$ (صحیح)
 د) $f(0) \leq 2 \Rightarrow 0^2 - 0 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2$ (صحیح)
 هـ) $f(2) \leq 3$ (صحیح)
 و) $f(3) \leq 2$ (نادرست)
 ز) $f(4) \leq 2 \Rightarrow 4^2 - 4 \leq 2 \Rightarrow 12 \leq 2$ (نادرست)
 ح) $f(5) \leq 2 \Rightarrow 5^2 - 5 \leq 2 \Rightarrow 20 \leq 2$ (نادرست)
 ط) $f(6) \leq 2 \Rightarrow 6^2 - 6 \leq 2 \Rightarrow 30 \leq 2$ (نادرست)
 ی) $f(7) \leq 2 \Rightarrow 7^2 - 7 \leq 2 \Rightarrow 42 \leq 2$ (نادرست)
 ک) $f(8) \leq 2 \Rightarrow 8^2 - 8 \leq 2 \Rightarrow 56 \leq 2$ (نادرست)
 ل) $f(9) \leq 2 \Rightarrow 9^2 - 9 \leq 2 \Rightarrow 72 \leq 2$ (نادرست)
 م) $f(10) \leq 2 \Rightarrow 10^2 - 10 \leq 2 \Rightarrow 90 \leq 2$ (نادرست)

۱

چون تابع $f(x)$ یک به یک است و مشتق آن برد دو ضابطه برابر است:
 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \geq 1 \rightarrow R_0^+ [1, +\infty) \\ x + a & ; x < 1 \rightarrow R_0^- (-\infty, 1) \end{cases}$
 شرط دوم برای یک به یک بودن، یک به یک بودن هر ضابطه به صورت جداگانه است که چون هر دو خط با شیب مثبت هستند پس شرط برقرار است.
 همچنین باید در نقطه $x=1$ نیز یک به یک بودن را بررسی کنیم:
 $f(1) = 1^2 - 1 = 0$
 $f(x) = x + a$ در $x=1$ باید $f(1) = 0$ باشد پس $1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$
 بنابراین $a \leq 1$ و $a = -1$ پس $a \in (-\infty, 1]$

۲

الف) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x \geq 1 \rightarrow R_0^+ [1, +\infty) \\ ax + a - 1 & ; x < 1 \rightarrow R_0^- (-\infty, 1) \end{cases}$
 شرط دوم برای یک به یک بودن، یک به یک بودن هر ضابطه به صورت جداگانه است که چون هر دو خط با شیب مثبت هستند پس شرط برقرار است.
 همچنین باید در نقطه $x=1$ نیز یک به یک بودن را بررسی کنیم:
 $f(1) = 1^2 - 1 = 0$
 $f(x) = ax + a - 1$ در $x=1$ باید $f(1) = 0$ باشد پس $a + a - 1 = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$
 بنابراین $a \in (0, 1]$

۳

الف) $y = x^2 + 2 \rightarrow x = \sqrt{y-2}$
 $x - 2 \leq y \Rightarrow \sqrt{y-2} - 2 \leq y \Rightarrow \sqrt{y-2} \leq y + 2$
 $y \geq 0 \Rightarrow y \leq 2$
 $y \leq 3 \Rightarrow 4 - 1 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2$ (نادرست)
 ب) $y = x^2 - 2x + 2 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y-1}$
 $x - 2 \leq y \Rightarrow 1 \pm \sqrt{y-1} - 2 \leq y \Rightarrow \pm \sqrt{y-1} \leq y + 1$
 $y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1$
 $y \leq 3 \Rightarrow 4 - 1 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2$ (نادرست)

۴

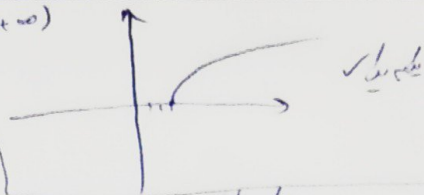
الف) $y = \frac{x+1}{x-2} \rightarrow x = \frac{y(y-2)+1}{y-2} = \frac{y^2 - 2y + 1}{y-2}$
 $x - 2 \leq y \Rightarrow \frac{y^2 - 2y + 1}{y-2} - 2 \leq y \Rightarrow \frac{y^2 - 2y + 1 - 2y + 4}{y-2} \leq y \Rightarrow \frac{y^2 - 4y + 5}{y-2} \leq y$
 $y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1$
 $y \leq 3 \Rightarrow 4 - 1 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2$ (نادرست)
 ب) $y = \frac{x+1}{x-2} \rightarrow x = \frac{y(y-2)+1}{y-2} = \frac{y^2 - 2y + 1}{y-2}$
 $x - 2 \leq y \Rightarrow \frac{y^2 - 2y + 1}{y-2} - 2 \leq y \Rightarrow \frac{y^2 - 4y + 5}{y-2} \leq y$
 $y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1$
 $y \leq 3 \Rightarrow 4 - 1 \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 2$ (نادرست)

۵

$$الف) y = \sqrt{x-1}$$

$$Rf = Df^{-1} \times [0, +\infty)$$

$$x = \sqrt{y-1} \rightarrow x^2 = y-1 \rightarrow \boxed{f(x) = x^2+1}$$

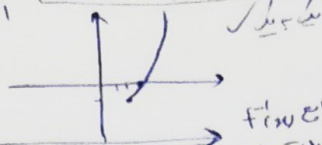


$$ب) y = x^2 - 8x + 17, x \in [0, +\infty) \quad \text{مثلاً} \quad \begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{c}{a} \cdot r \\ c = a \cdot r^2 - 1 \end{cases}$$

$$x = 1 \rightarrow y = 9 - 8 + 17 = 10$$

$$x = \sqrt{y-1} \rightarrow y = x^2 + 1 \rightarrow (x-1)^2 = 1 \rightarrow x-1 = \pm \sqrt{y-1}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{y-1} \rightarrow \boxed{f^{-1}(y) = 1 \pm \sqrt{y-1}}$$



فرد تابع اولی برلری با دامنه تابع $f(x)$ بین مقادیر ثابت ثابت قابل قبول است

$$f(x) = y \leq x + \sqrt{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \Rightarrow y \leq (x + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x} \rightarrow x = (\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}) - \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \leq \sqrt{y}$$

$$f(x) = y \leq x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \sqrt{x+1} \in \sqrt{y} \leq \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{y}} \leftarrow \text{نامنفی است بین مقادیر ثابت ثابت قابل قبول است}$$

$$ax + b - \sqrt{x-c} \leq x + \frac{1}{x} - \sqrt{x+1} \quad 1 + 2(\frac{1}{x}) + 2(\frac{1}{x}) = 1$$

$$(a < 1) \quad (b \leq \frac{1}{x}) \quad (c = -\frac{1}{x}) \Rightarrow$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \xrightarrow{()^2} \frac{x^2}{x^2-1} \leq y^2 \rightarrow x^2 \leq y^2 x^2 - y^2 \rightarrow y^2 = \frac{y^2 x^2 - x^2}{x^2(y^2-1)}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{x\sqrt{y}}{x-1}} \quad x = \sqrt{\frac{y}{y^2-1}} \leftarrow \pm \sqrt{\frac{y}{y^2-1}} \leq x \leftarrow \frac{y}{y^2-1} \leq x^2$$

$$\begin{cases} (x_1, y) \\ (x_2, y) \end{cases} \in f$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}} \leq \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-1}} \rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-1} \leq \frac{x_2^2}{x_2^2-1} \rightarrow x_1^2 x_2^2 - x_2^2 \leq x_1^2 x_2^2 - x_1^2$$

$$\text{مثلاً} \quad (x_1, x_2) \text{ مستند} \quad x_1 < x_2 \rightarrow x_1^2 < x_2^2 \rightarrow x_1^2 x_2^2 - x_2^2 < x_1^2 x_2^2 - x_1^2$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

چون دامنه تابع $f(x)$ برابر با بردار $f^{-1}(x)$ است پس:

$$f(-\frac{r}{a}) = a = -\frac{r}{a}$$

$$f^{-1}(a) = -\frac{r}{a} \rightarrow \frac{a}{1+|a|} = -\frac{r}{a} \rightarrow -r - r|a| \leq aa \rightarrow a > 0 \rightarrow -r - ra \leq aa \rightarrow va \leq -r$$

$$\emptyset = \emptyset \cap \emptyset \quad a = -\frac{r}{a}$$

$$a < 0 \rightarrow -r + ra \leq aa \rightarrow va \leq -r$$

$$g^{-1}(-\frac{r}{a}) \leq b = \frac{q}{a}$$

$$g(b) \leq -\frac{r}{a} \rightarrow \sqrt{b-1} \leq -\frac{r}{a} \rightarrow \sqrt{b} \leq \frac{r}{a} + 1 \rightarrow b \leq \frac{q}{a}$$

$$a = -\frac{r}{a} \in \emptyset \cap \emptyset \quad a = -\frac{r}{a}$$

$$f(-\frac{r}{a}) + g^{-1}(-\frac{r}{a}) = -\frac{r}{a} + \frac{q}{a} \leq \frac{-r+q}{a} \leq \frac{-r+q}{a}$$

$$f^{-1}(x) \leq \sqrt{x-1} \rightarrow x \leq \sqrt{y-1} \rightarrow x^2 \leq y-1 \rightarrow y \leq x^2+1 = f(x)$$

$$y = \frac{x}{x-1}$$

$$g(x) \leq x^2+1 + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow a^2+1 + \sqrt{a^2+1} \leq 17 \Rightarrow t^2+t \leq 17 \Rightarrow t^2+t-17 \leq 0$$

$$\boxed{g^{-1}(17) \leq a \leq 17}$$

$$\sqrt{a^2+1} \leq t$$

$$\sqrt{a^2+1} \leq t \Rightarrow t^2 \leq a^2+1 \Rightarrow t^2-1 \leq a^2$$

$$\sqrt{a^2+1} \leq t \Rightarrow t^2-1 \leq a^2$$

$$g(a) \leq 17$$

1.