ملیکا محمدحسینی

۱۸٫۲۵

۱

$$f=\{(۳,۲),(x,۵),(۳,x^۲-x),(\tfrac{x}{۳},۲),(-۱,۴)\}$$

$x^۲-x=۲ \rightarrow x^۲-x-۲=۰ \rightarrow (x-۲)(x+۱)$ $\boxed{x=۲}$ ق ق ، $x=-۱$ غ ق ق

۲

$$f=\{(-۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(a^{-۱},\underbrace{m^۲-۱}_{۱}),(\underbrace{a^{-۱}+۲}_{۱},n),(m,۳)\}$$

$m=۲$

$a=-۱$

$n=۲$

$(۱,۲)(۱,n) \rightarrow \boxed{n=۲}$

۲

$$f(x)=\begin{cases}۳x-۱ & x\geq ۱ \\ x+a & x<۱\end{cases}$$

یک به یک ، یک به یک ، $a=?$

$f(۱)=۳(۱)-۱=۲$

$f(۱)=۱+a=۲$

هر دو تابع صعودی اند پس شرط هم جهت بودن هست

if $a=۱$ → پیوسته → تابع صعودی → یک به یک هست

if $a>۱$ → تابع از بزرگ به کوچک می رود → صعودی نیست → یک به یک نیست

if $a<۱$ → از چپ به راست افزایشی → یک به یک هست

$\underline{a\leq ۱}$ است پس → $(-\infty,۱]$

$x\geq ۱ \rightarrow ۳(۱)-۱=۲ \rightarrow R=[۲,+\infty)$

$x<۱ \rightarrow R=(-\infty,۱+a)$ $\longrightarrow R_۱\cap R_۲=\varnothing$

۲

۳

$$f(x)=\begin{cases}۳x-۱ & x\geq ۱ \rightarrow [۲,+\infty) \\ ax+a-۱ & x\leq ۰\end{cases} \quad a=?$$

$\rightarrow a>۰ \rightarrow (-\infty,a-۱]$

$\rightarrow a\leq ۰ \rightarrow [a-۱,\infty)$

$\rightarrow a=۰$ ثابت می شود

باید اشتراک نداشته باشد باید $a-۱<۲ \rightarrow a<۳$ و همچنین $a>۰ \leftarrow$ $\boxed{۰<a<۳}$

۲

۴

$y=x^۳+۲$ $\quad f(x_۱)=f(x_۲)$

$x_۱^۳+۲=x_۲^۳+۲ \rightarrow x_۱^۳=x_۲^۳ \rightarrow x_۱=x_۲$ ✓

$D_y=R_y=\mathbb{R}$ $\quad y=f(x)=x^۳+۲ \rightarrow x=\sqrt[۳]{y-۲}$

$f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۲}$

۲

ملیکا محمد حسینی

۴)

x^2-4x+2

$f(0)=0^2-4(0)+2=2$

$f(4)=4^2-4(4)+2=2$

راس سهمی $=\frac{-b}{2a}=-\frac{-4}{2}=2$

غیر یک به یک

تابع یک به یک $x\geq 2$ فقط

تابع یک به یک $x\leq 2$ فقط

$f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+2}$ $\quad x\geq 2$

$f^{-1}(x)=2-\sqrt{x+2}$ $\quad x\leq 2$

۵)

۱)

$\frac{3x+1}{x-2}$ $\quad x_1=x_2$ $\quad \frac{3x_1+1}{x_1-2}=\frac{3x_2+1}{x_2-2}\to(3x_1+1)(x_2-2)=(3x_2+1)(x_1-2)$

$3x_1x_2-6x_1+x_2-2=3x_1x_2-6x_2+x_1-2$

$-6x_1+x_2=-6x_2+x_1\to -7x_1+7x_2=0\to x_1=x_2$ تابع یک به یک

$\to y=(x-2)=3x+1\to yx-2y=3x+1$

$yx-3x=2y+1\to x(y-3)=2y+1\to x=\frac{2y+1}{y-3}\to y=\frac{2x+1}{x-3}$

۲)

$\frac{4+2x}{x+2}$ $\quad x_1=x_2\to\frac{2x_1+4}{x_1+2}=\frac{2x_2+4}{x_2+2}\to(2x_1+4)(x_2+2)=(2x_2+4)(x_1+2)$

$2x_1x_2+4x_2+4x_1+8=2x_1x_2+4x_1+4x_2+8$

$2x_2+4x_1=4x_2+2x_1\to 2x_1-2x_2=0\to x_1=x_2$

$\frac{2\cancel{(2+x)}}{\cancel{x+2}}=2,\ x\neq-2$

یک به یک نیست

$y=\frac{2x+4}{x+2}\to y(x+2)=2x+4$

$yx+2y=2x+4\to yx-2x=4-2y$

$x(y-2)=4-2y\to x=\frac{4-2y}{y-2}\to f^{-1}(x)=\frac{4-2x}{x-2}$

۴)

$\sqrt{x-3}$ $\quad D=x-3\geq0\to x\geq3\to$ ✓ همه صعودی $\xrightarrow{x_1\neq x_2}$ تابع یک به یک

$\to y=\sqrt{x-3}\to y^2=x-3\to x=y^2+3\to f^{-1}(x)=x^2+3$ $\quad x\geq0$

۳)

$x^2-4x+3,\ x\in[2,+\infty)$

$f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$\frac{-b}{2a}=2\to$ راس سهمی $\quad D=x\geq2\to$ کلی صعودی $\to$ یک به یک

$\to y=x^2-4x+3$ $\quad x^2-4x+(3-y)=0$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4(3-y)}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{y+1}}{2}=2\pm\sqrt{y+1}$ $\quad x\geq2\xrightarrow{\text{علامت }+}\boxed{f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}}$

مبینا محمدحسینی

۱۷)

$y=f(x)=x+\sqrt{x}$

$f^{-1}(x) \to x=y+\sqrt{y} \xrightarrow{\sqrt{y}=t} x=t^2+t \to t^2+t-x=0$

$t=\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2} \qquad t=\sqrt{y}\geq 0$

$y=t^2=\left(\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^2 \to y=\frac{1-2\sqrt{1+4x}+1+4x}{4}=x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x}$

$x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x} \to ax+b-\sqrt{x-c} \qquad \frac{1}{2}\sqrt{1+4x}=\sqrt{x-c}$

$\frac{1}{4}(1+4x)=x-c \qquad \frac{1}{4}+x=x-c \qquad c=-\frac{1}{4}$

$a=1 \quad b=\frac{1}{2} \qquad a+2b+4c=1+2\left(\frac{1}{2}\right)+4\left(-\frac{1}{4}\right)=1$

۲

۱۸)

$f(x_1)=f(x_2)\to x_1=x_2 \qquad \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}}$

$x_1\sqrt{x_2^2-2}=x_2\sqrt{x_1^2-2} \xrightarrow{(\,)^2} x_1^2(x_2^2-2)=x_2^2(x_1^2-2)$

$x_1^2x_2^2-2x_1^2=x_1^2x_2^2-2x_2^2 \to -2x_1^2=-2x_2^2\to x_1^2=x_2^2$

$x_1=x_2 \qquad x_1=-x_2 \qquad x\geq 0\to \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\geq 0 \qquad x<0 \to \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}<0 \qquad \to x\geq\sqrt{2},\ x\leq-\sqrt{2}$

۲

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}\to y\sqrt{x^2-2}=x$

$y^2(x^2-2)=x^2\to y^2x^2-2y^2=x^2 \qquad y^2x^2-x^2=2y^2\to x^2(y^2-1)=2y^2$

$x^2=\frac{2y^2}{y^2-1} \qquad x\geq 0\to x=\sqrt{\frac{2y^2}{y^2-1}} \qquad \boxed{f^{-1}(y)=\sqrt{\frac{2y^2}{y^2-1}} \quad y>1}$

۱۹)

$f^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}}=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}}=\frac{-2}{7}$

۱,۲۵

$g^{-1}(x)\to y=\sqrt{x}-1\to y+1=\sqrt{x}\to x=(y+1)^2 \qquad g^{-1}(x)=(x+1)^2$

$g^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

$-\frac{2}{7}+\frac{9}{25}=\frac{13}{175}$ ✓✓

$f(a)=\frac{-2}{5}=\frac{a}{1+|a|}\to a=\frac{-2}{3}$

$g(b)=\frac{-2}{5}=\sqrt{b}-1\to b=\frac{9}{25}$

$a+b=\frac{-23}{75}$

ملیکا محمدحسینی

۱۰

$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow y^3 = x-1 \rightarrow x = y^3+1 \rightarrow f(x) = x^3+1$

$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} = (x^3+1) + \sqrt{x^3+1}$

۵

$g^{-1}(12) \rightarrow x^3+1+\sqrt{\underbrace{x^3+1}_{t}} = 12$

$t^2 + t = 12 \rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \qquad t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2}$

$t_1 = 3$ ق‌ق

$t_2 = -4$ غ‌ق‌ق

$t = \sqrt{x^3+1} = 3 \rightarrow x^3+1 = 9 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$

$g^{-1}(12) = 2$