ملیکا محمدحسینی

۱)

$f = \{(3,2),(n,5),(3,n^2-n),(\frac{m}{3},2),(-1,4)\}$

$n^2-n=2 \rightarrow n^2-n-2=0 \rightarrow (n-2)(n+1)$ → $\boxed{n=2}$ ق ق ، $n=-1$ غ ق ق

$f = \{(-1,1),(1,2),(2,3),(\overset{-1}{a},\underbrace{m-1}_{1}),(\overset{-1}{a}+2,\underbrace{n}_{1}),(m,3)\}$

$m=2$

$a=-1$

$n=2$

$(1,2)(1,n) \rightarrow n=2$

۲)

$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 1 \quad \text{یک به یک} \\ x+a & x<1 \quad \text{یک به یک} \end{cases}$ $a=?$

$f(1)=3(1)-1=2$

$f(1)=1+a=2$

هر دو تابع صعودی اند پس شرط هم جهت بودن هست

if $a=1$ → پیوسته → تابع صعودی → یک به یک هست

if $a>1$ → تابع از نقطه بزرگ به کوچک می رود → صعودی نیست → یک به یک نیست

if $a<1$ → از چپ به راست افزایش → یک به یک

تا $a \leq 1$ است پس → $(-\infty,1]$

$x \geq 1 \rightarrow 3(1)-1=2 \rightarrow R=[2,+\infty)$

$x<1 \rightarrow R=(-\infty,1+a)$ $\longrightarrow R_1 \cap R_2 = \varnothing$

۳)

$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 1 \rightarrow [2,+\infty) \\ ax+a-1 & x \leq 0 \rightarrow a>0 \rightarrow (-\infty,a-1] \end{cases}$ $a=?$

$a \leq 0 \rightarrow [a-1,\infty)$

$a=0$ ثابت می شود

نباید اشتراک داشته باشد پس $a-1<2 \rightarrow a<3$ و همچنین $a>0$ ← $\boxed{0<a<3}$

۴)

$y=x^3+2 \quad f(x_1)=f(x_2)$

$x_1^3+2=x_2^3+2 \rightarrow x_1^3=x_2^3 \rightarrow x_1=x_2$ ✓

$D_y=R_y=\mathbb{R} \quad y=f(x)=x^3+2 \rightarrow x=\sqrt[3]{y-2}$

$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$

ملیکا محمدحسینی ۱۴)

ب) x^2-4x+3

$f(0)=0^2-4(0)+3=3$

$f(4)=4^2-4(4)+3=3$

یک به یک نیست

راس $=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2}=2$

فقط $x\geq 2$ تابع یک به یک

فقط $x\leq 2$ تابع یک به یک

$f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}$ $x\geq 2$

$f^{-1}(x)=2-\sqrt{x+1}$ $x\leq 2$

۵)

$\frac{3x+1}{x-2}$ $x_1=x_2$ $\frac{3x_1+1}{x_1-2}=\frac{3x_2+1}{x_2-2}\to(3x_1+1)(x_2-2)=(3x_2+1)(x_1-2)$

$3x_1x_2-6x_1+x_2-2=3x_1x_2-6x_2+x_1-2$

$-6x_1+x_2=-6x_2+x_1\to-7x_1+7x_2=0\to x_1=x_2$ تابع یک به یک

$\to y=(x-2)=3x+1\to yx-2y=3x+1$

$yx-3x=2y+1\to x(y-3)=2y+1\to x=\frac{2y+1}{y-3}\to y=\frac{2x+1}{x-3}$

$\frac{4+2x}{x+2}$ $x_1=x_2\to\frac{2x_1+4}{x_1+2}=\frac{2x_2+4}{x_2+2}\to(2x_1+4)(x_2+2)=(2x_2+4)(x_1+2)$

$2x_1x_2+4x_2+4x_1+8=2x_1x_2+4x_1+4x_2+8$

$2x_2+4x_1=4x_2+2x_1\to2x_1-2x_2=0\to x_1=x_2$

$y=\frac{2x+4}{x+2}\to y(x+2)=2x+4$

$yx+2y=2x+4\to yx-2x=4-2y$

$x(y-2)=4-2y\to x=\frac{4-2y}{y-2}\to f^{-1}(x)=\frac{4-2x}{x-2}$

۶)

$\sqrt{x-3}$ $D=x-3\geq0\to x\geq3\to$ ✓ همه صعودی $\xrightarrow{x_1\neq x_2}$ تابع یک به یک

$\to y=\sqrt{x-3}\to y^2=x-3\to x=y^2+3\to f^{-1}(x)=x^2+3$ $x\geq0$

$x^2-4x+3,\ x\in[2,+\infty)$

$f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

$-\frac{b}{2a}=2\to$ راس $D=x\geq2\to$ صعودی $\to$ یک به یک

$\to y=x^2-4x+3$ $x^2-4x+(3-y)=0$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4(3-y)}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{y+1}}{2}=2\pm\sqrt{y+1}$ $x\geq2\xrightarrow{\text{علامت +}}\boxed{f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}}$

ملیکا محمدحسینی

۷)

$y = f(x) = x + \sqrt{x}$

$f^{-1}(x) \to x = y + \sqrt{y} \xrightarrow{\sqrt{y}=t} x = t^2 + t \to t^2 + t - x = 0$

$t = \dfrac{-1 + \sqrt{1+4x}}{2} \qquad t = \sqrt{y} \geq 0$

$y = t^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^2 \to y = \dfrac{1 - 2\sqrt{1+4x} + 1 + 4x}{4} = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4x}$

$x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4x} \longrightarrow ax + b - \sqrt{x-c} \qquad \frac{1}{2}\sqrt{1+4x} = \sqrt{x-c}$

$\frac{1}{4}(1+4x) = x - c \qquad \frac{1}{4} + x = x - c \qquad c = -\frac{1}{4}$

$a = 1 \quad b = \frac{1}{2} \qquad a + 2b + 4c = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(-\frac{1}{4}\right) = 1$

۸)

$f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2 \qquad \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}}$

$x_1\sqrt{x_2^2-2} = x_2\sqrt{x_1^2-2} \xrightarrow{(\ )^2} x_1^2(x_2^2-2) = x_2^2(x_1^2-2)$

$x_1^2x_2^2 - 2x_1^2 = x_1^2x_2^2 - 2x_2^2 \longrightarrow -2x_1^2 = -2x_2^2 \to x_1^2 = x_2^2$

$x_1 = x_2 \qquad x_1 = -x_2$

$x > 0 \longrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}} > 0 \longrightarrow x \geq \sqrt{2}$

$x < 0 \to \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}} < 0 \qquad x \leq -\sqrt{2}$

$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}} \longrightarrow y\sqrt{x^2-2} = x$

$y^2(x^2-2) = x^2 \to y^2x^2 - 2y^2 = x^2 \qquad y^2x^2 - x^2 = 2y^2 \to x^2(y^2-1) = 2y^2$

$x^2 = \dfrac{2y^2}{y^2-1} \qquad x > 0 \to x = \sqrt{\dfrac{2y^2}{y^2-1}} \qquad \boxed{f^{-1}(y) = \sqrt{\dfrac{2y^2}{y^2-1}} \quad y > 1}$

۹)

$f^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right) = \dfrac{-\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \dfrac{-\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = -\dfrac{2}{7}$

$g^{-1}(x) \longrightarrow y = \sqrt{x} - 1 \longrightarrow y + 1 = \sqrt{x} \longrightarrow x = (y+1)^2 \qquad g^{-1}(x) = (x+1)^2$

$g^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

$-\dfrac{2}{7} + \dfrac{9}{25} = \dfrac{13}{175}$ ✓✓

ملیکا محمد حسینی

۱۵

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x-1} \rightarrow y^3 = x-1 \rightarrow x = y^3+1 \rightarrow f(x) = x^3+1$$

$$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} = (x^3+1) + \sqrt{x^3+1}$$

$$g^{-1}(12) \rightarrow x^3+1+\sqrt{\underbrace{x^3+1}_{t}} = 12$$

$$t^2+t = 12 \rightarrow t^2+t-12 = 0 \qquad t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$t_1 = 3$ ق ق

$t_2 = 4$ ق ق

$$t = \sqrt{x^3+1} = 3 \rightarrow x^2+1 = 9 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$$

$$g^{-1}(12) = 2$$