۱۹

۱) الف) $\{(3,2),(n,5),(3,n^2-n),(m,2),(-1,4)\}$

$n^2-n=2 \to n^2-n-2=0 \to (n-2)(n+1)=0 \to \begin{cases} n=2 \\ n=-1 \to \text{غ ق ق} \end{cases}$

$\xrightarrow{n=2} \{(3,2),(2,5),(m,2),(-1,4)\} \to m=3$

۲

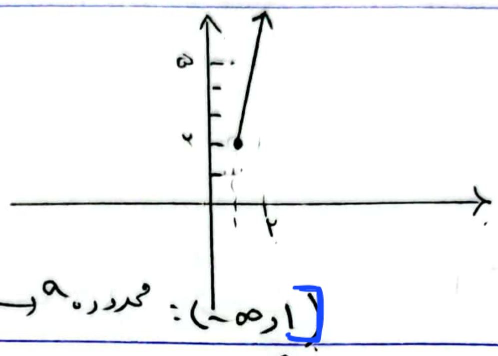
ب) $f=\{(-1,1),(1,2),(2,3),(a,m-1),(a+2,n),(m,3)\}$ $\quad m=2$

$f=\{(-1,1),(1,2),(2,3),(a,1),(a+2,n)\} \to a=-1 \;,\; n=2$

۲) $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x\geq 1 \\ x+a & x<1 \end{cases}$

x	1	2
y	2	5

x	1
y	



۱,۷۵

$x<1$ باید $\xrightarrow{+a} x+a<1+a$

برد: $x+a<2$ $\qquad 1+a=2$, $a=1$

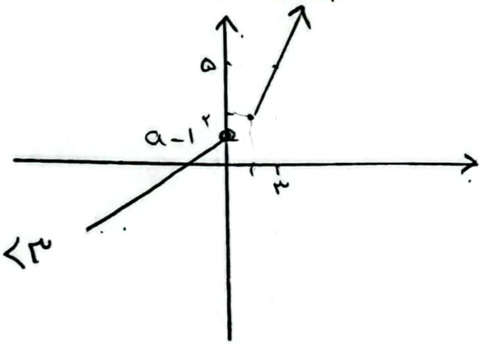
$\to a$ محدوده: $(-\infty,1]$

۳) $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & x\geq 1 \\ ax+a-1 & x\leq 0 \end{cases}$

x	1	2
y	2	5

$f_1 \to ax+a-1$

شیب $=a>0$



۲

$R_{f_1}=(-\infty,a-1] \to a-1<2 \Rightarrow a<3$

$\begin{cases} a<3 \\ a>0 \end{cases} \to 0<a<3$

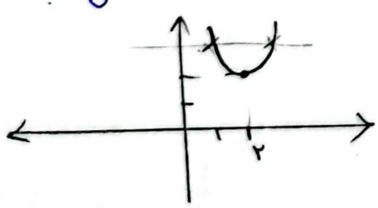
۴) الف) $y=x^3+2$ اثبات یک به یک بودن

$y_1=y_2 \to x_1^3+\cancel{2}=x_2^3+\cancel{2} \to x_1^3=x_2^3 \to x_1=x_2$

ضابطه وارون $\quad y-2=x^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{\;}} x=\sqrt[3]{y-2} \to f^{-1}(x)=y=\sqrt[3]{x-2}$

۲

ب) $y=(x^2-4x+2)+2-2 = x^2-4x+4-2=(x-2)^2+2$



طبق نمودار یک به یک نیست
چون خط افقی نمودار را در ۲ نقطه
قطع می‌کند.

۵) الف) $y=\dfrac{3x+1}{x-2} \to y_1=y_2 \Rightarrow \dfrac{3x_1-1}{x_1-2}=\dfrac{3x_2-1}{x_2-2} \to (3x_1-1)(x_2-2)=(3x_2-1)(x_1-2)$

$\cancel{3x_1x_2}-6x_1-x_2+\cancel{2}=\cancel{3x_1x_2}-6x_2-x_1+\cancel{2} \to -6x_1+x_1=-6x_2+x_2 \to \cancel{-5}x_1=\cancel{-5}x_2$

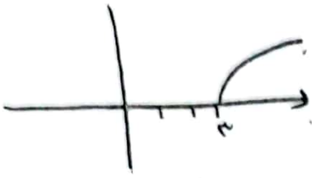
$\to x_1=x_2$ ✓ ضابطه وارون $\quad y(x-2)=3x+1 \to xy-y=3x+1 \Rightarrow xy-3x=y+1$

$x(y-3)=y+1 \to x=\dfrac{y+1}{y-3} \to f^{-1}(x)=y=\dfrac{2x+1}{x-3}$

۱,۷۵

ب) $y=\frac{4+2x}{x+2}=\frac{2(\cancel{2+x})}{\cancel{x+2}}=2$ $\to y=2$ یک به یک نیست و معکوس پذیر نیست

۶) الف) $y=\sqrt{x-3}$ $y^2=x-3 \to y^2+3=x \to f^{-1}(x)=y=x^2+3$



یک به یک است

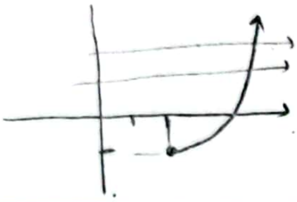
۳

ب) $y=x^2-4x+3$ $x\in[2,+\infty)$ ضابطه دارد $y=(x-2)^2-1 \to \sqrt{y+1}=\sqrt{(x-2)^2}$

$y=\underbrace{x^2-4x+3+1}-1=(x-2)^2-1$ / $\sqrt{\ } \to \sqrt{y-1}=x-2 \to \sqrt{y-1}+2=x$

یک به یک

$\to f^{-1}(x)=y=\sqrt{x-1}+2$



۷) وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ در بازه $(0,+\infty)$ به صورت $f^{-1}(x)=ax+b-\sqrt{x-c}$ حاصل $a+2b+4c$ ؟

$y=\underbrace{x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=(\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2$ / $f^{-1}(x)=x+\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

۱,۷۵

$y+\frac{1}{4}=(\sqrt{x}+\frac{1}{2})^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y+\frac{1}{4}}=\sqrt{x}+\frac{1}{2} \longrightarrow \sqrt{y+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}}$

$y+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\sqrt{y+\frac{1}{4}}=x \to y-\sqrt{y+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}=x \Rightarrow f^{-1}(x)=x-\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$

$a=1$ و $b=1/4$ و $c=-1/4$ $a+2b+4b=1$

۸) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \to y_1=y_2 \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{x_1^2}{x_1^2-2}=\frac{x_2^2}{x_2^2-2}$

$\to x_1^2\cancel{x_2^2}-2x_1^2=x_1^2\cancel{x_2^2}-2x_2^2 \longrightarrow x_1=x_2$ تابع یک به یک

۲

$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \to y^2=\frac{x^2}{x^2-2} \Rightarrow x^2y^2-2y^2=x^2 \Rightarrow x^2y^2-x^2=2y^2 \to$

$x^2(y^2-1)=2y^2 \to x^2=\frac{2y^2}{y^2-1} \to x=\pm\frac{\sqrt{2}\,y}{\sqrt{y^2-1}} \to f^{-1}(x)=y \xrightarrow[\text{جا به جا می کنیم}]{y,x} \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2-1}}$

۹) $f^{-1}(x)=\frac{x}{1+|x|}$, $g(x)=\sqrt{x}-1$ $f(-\frac{2}{5})+g^{-1}(-\frac{2}{5})=\frac{-2}{3}+\frac{9}{5}=\frac{-10+27}{15}=\frac{17}{15}$

$f(x)=\frac{x}{1-|x|} \to f(-\frac{2}{5})=\frac{-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{-\frac{2}{\cancel{5}}}{\frac{3}{\cancel{5}}}=-\frac{2}{3}$

$g^{-1}(-\frac{2}{5}) \to -\frac{2}{5}=\sqrt{x}-1 \to -\frac{2}{5}+1=\sqrt{x} \to \frac{3}{5}=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{9}{5}=x$

۱,۷۵

$g^{-1}(-\frac{2}{5})=\frac{9}{5}$

$\frac{-2}{3}+\frac{9}{25}=\frac{-23}{75}$

۱۰) اگر $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$ و $g(x)=f(x)+\sqrt{f(x)}$ حاصل $g^{-1}(12)$ ؟

$$y=\sqrt[3]{x-1} \xrightarrow{\text{توان ۳}} y^3=x-1 \longrightarrow y^3+1=x \longrightarrow y=x^3+1 \leftarrow f(x)$$

۲

$$g(x)=\underbrace{x^3+1+\sqrt{x^3+1}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=\left(\sqrt{x^3+1}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$$12=\left(\sqrt{x^3+1}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \longrightarrow \sqrt{12+\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(\sqrt{x^3+1}+\frac{1}{2}\right)^2} \xrightarrow{\sqrt{\ }} \pm\frac{7}{2}=\sqrt{x^3+1}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=(3)^2=\left(\sqrt{x^3+1}\right)^2 \longrightarrow 9=x^3+1 \longrightarrow x^3=8 \longrightarrow x=2 \longrightarrow g^{-1}(12)=2$$