14,5

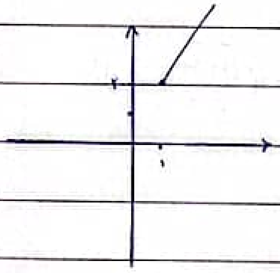
آرشا یبسی — یازدهم دفتر A — تکلیف شماره ۱۰

۱- $f=\{(3,2)(n,5)(3,n^2-n)(m,2)(-1,4)\} \rightarrow n^2-n=2 \rightarrow n^2-n-2=0 \rightarrow \cancel{n=-1}\ \ n=2$
$\Rightarrow m=3,\ n=2$

۲

$f=\{(-1,1)(1,2)(2,3)(a,m-1)(a+2,n)(m,3)\} \rightarrow m=2 \Rightarrow a=-1 \rightarrow n=2$

۲-



$3x-1\ ;\ x\geq 1 \rightarrow R=[2,+\infty)$
$x+a\ ;\ x<1 \rightarrow R=(-\infty,1+a)$
$\Rightarrow 1+a\leq 2 \rightarrow a\leq 1$

۲

۳-
$3x-1\ ;\ x\geq 1 \rightarrow R=[2,+\infty)$
$ax+a-1\ ;\ x<0 \rightarrow$ a نمی‌تواند منفی یا صفر باشد $\rightarrow R=(-\infty,a-1]$ $\Rightarrow a-1<2 \rightarrow a<3$
$a>0$ $\quad 0<a<3$

1,5

۴- الف) $y=x^3+2 \rightarrow y_1=y_2 \rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow x_1^3+2=x_2^3+2 \rightarrow x_1=x_2$ ✓

محاسبه معکوس: $x^3=y-2 \rightarrow x=\sqrt[3]{y-2} \rightarrow y=\sqrt[3]{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$

۳

ب) $y=x^2-4x+2 \rightarrow$ ضابطه سهمی است بنابراین یک‌به‌یک نیست

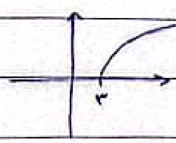
۵- الف) $y=\frac{3x+1}{x-2} \rightarrow$ هذلولی یک‌به‌یک است

محاسبه معکوس: $yx-2y=3x+1 \rightarrow yx-3x=1+2y \rightarrow x(y-3)=1+2y \rightarrow x=\frac{1+2y}{y-3} \rightarrow y=\frac{1+2x}{x-3}$
$\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1+2x}{x-3}$

۳

ب) $y=\frac{4+2x}{x+2} \rightarrow y=\frac{2(x+2)}{(x+2)} \rightarrow y=2$ یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر نیست.

۶- الف)



$y=\sqrt{x-3}$ یک‌به‌یک است

۳

محاسبه معکوس: $x=\sqrt{y-3} \rightarrow x^2=y-3 \rightarrow x\geq 3 \rightarrow f^{-1}(x)=x^2+3 \quad x\geq 0$

s.a.m

ب) $y=x^2-4x+3+1-1 \to y=x^2-4x+4-1 \to y=(x-2)^2-1 \to (x-2)^2=y+1$

$\to x-2=\pm\sqrt{y+1} \to x=2\pm\sqrt{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x)=2+\sqrt{x+1}$

$D=[2,+\infty)$ نمی‌تواند منفی باشد چون

$y=x+\sqrt{x} \to x=y+\sqrt{y} \xrightarrow{\sqrt{y}=n} x=n^2+n \to n^2+n-x=0 \to n=\frac{-1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$ ‎-7

$\sqrt{y}\geq 0 \to n=\frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2} \xrightarrow{n=\sqrt{y}\,,\ n^2=y} y=\left(\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}\right)^2 \Rightarrow y=\frac{4x+2-2\sqrt{1+4x}}{4}$

$\to y=x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4x} \to y=x+\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}} \Rightarrow f^{-1}(x)=x+\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}$

$a=1 \quad b=\frac{1}{2} \quad c=-\frac{1}{4} \Rightarrow a+2b+4c=1+1-1=1$

$y_1=y_2 \to \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}}=\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \to \frac{x_1^2}{x_1^2-2}=\frac{x_2^2}{x_2^2-2} \Rightarrow x_1^2x_2^2-2x_1^2=x_2^2x_1^2-2x_2^2$ ‎-8

$\to x_1^2=x_2^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2 \xrightarrow{\text{وقتی ترانز آنها ثابت باشد}} x_1=x_2$

محاسبه معکوس : $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \to x=\frac{y}{\sqrt{y^2-2}} \to x^2=\frac{y^2}{y^2-2} \Rightarrow x^2y^2-2x^2=y^2$

$\to x^2y^2-y^2=2x^2 \to y^2(x^2-1)=2x^2 \to y^2=\frac{2x^2}{x^2-1} \to y=\pm\sqrt{\frac{2x^2}{x^2-1}} \to y=\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x^2-1}}$

x , y هم علامت هستند.

‎-9

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & x\geq 0 \longrightarrow R=[0,1) \\[2ex] \dfrac{x}{1-x} & x<0 \longrightarrow R=(-1,0)\end{cases} \xrightarrow{\cup} (-1,1)=R$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x\geq 0 & \dfrac{x}{1-x} \\[2ex] x<0 & \dfrac{x}{1+x}\end{cases} \Rightarrow f\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{-\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{2}{3}$$

$g(x) = \sqrt{x} - 1 \rightarrow$ کافیست : $y = \sqrt{x} - 1 \rightarrow x = \sqrt{y} - 1 \rightarrow x + 1 = \sqrt{y}$

$\rightarrow y = (x+1)^2 \rightarrow g^{-1}(x) = (x+1)^2$

$\rightarrow g^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{9}{25}$

$f\left(-\frac{2}{5}\right) + g^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{9}{25} = \frac{-50 + 27}{75} = \frac{-23}{75}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow f(x) = x^3 + 1$

$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} = x^3 + 1 + \sqrt{x^3+1} \rightarrow g(x) = 12$

$\Rightarrow x^3 + 1 + \sqrt{x^3+1} = 12 \xrightarrow{\sqrt{x^3+1} = n} n^2 = x^3 + 1 \rightarrow n^2 + n = 12 \rightarrow n^2 + n - 12 = 0$

$\rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \rightarrow n = 3 \quad \cancel{n = -4} \times \rightarrow n \geq 0 \Rightarrow n = 3$

$\sqrt{x^3+1} = 3 \rightarrow x^3 + 1 = 9 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x = 2$

$\Rightarrow g^{-1}(12) = 2$