پریا امینی

-1

$$\frac{L_1}{W} = \frac{5}{4} \longrightarrow L_1 = \frac{5}{4} W$$ نسبت طول به عرض

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = Z = \frac{L_2}{W}$$ نسبت طول به عرض جدید $\longrightarrow L_2 = WZ$

نسبت مساحت ها

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{L_2 \times W}{L_1 \times W} = \frac{L_2}{L_1} \longrightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{WZ}{\left(\frac{5}{4}\right)W} = \frac{4}{5}Z$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4}{5} \times \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{4+4\sqrt{5}}{10} = \frac{2+2\sqrt{5}}{5} \simeq 1{,}29$$

پریا امینی

۲-

طول $\rightarrow L$

عرض $\rightarrow W$

قطر $\rightarrow \sqrt{L^2+W^2} = D$

$\frac{D}{L} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = Z \rightarrow \frac{\sqrt{L^2+W^2}}{L} = Z \xrightarrow{\text{توان } 2}$

$\frac{L^2+W^2}{L^2} = Z^2 \rightarrow 1+\left(\frac{W}{L}\right)^2 = Z^2 \rightarrow \left(\frac{L}{W}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{W}{L}\right)^2} = \frac{1}{Z^2-1}$

$\left.\begin{cases} Z^2 = Z+1 \\ Z^2-1 = Z \end{cases}\right\} \left(\frac{L}{W}\right)^2 = \frac{1}{Z} \rightarrow \frac{1}{Z} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \simeq 0{,}618$

رابطه عدد طلایی $\rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = Z \rightarrow \frac{x+y}{x} = Z \rightarrow 1+\frac{y}{x} = Z = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{Z} \rightarrow 1+\frac{1}{Z} = Z \rightarrow Z+1 = Z^2$

$\rightarrow \frac{x}{y} = Z$

اثبات

دریا امینی

-۳

$$3a + \sqrt{2a^2+4a} = 2 \rightarrow \sqrt{2a^2+4a} = \underbrace{2-3a}_{\text{مثبت یا صفر}} \rightarrow 2-3a \geq 0 \rightarrow a \leq \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{2a^2+4a} = 2-3a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2+4a = 4+9a^2-12a \rightarrow 7a^2-16a+4=0$$

$$a = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2-4(7)(4)}}{2\times 7} = \frac{16 \pm \sqrt{256-112}}{14} = \frac{16 \pm \sqrt{144}}{14} \rightarrow a = \frac{16 \pm 12}{14}$$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{16-12}{14} = \dfrac{2}{7} \\ a_2 = \dfrac{16+12}{14} = 2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$a \leq \frac{2}{3} \rightarrow a = \frac{2}{7}$$

$$\frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7}+\frac{7}{7}}{\frac{7}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{7}{7}} = \frac{9\times 7}{7\times 7} = \frac{9}{7} \simeq 1{,}29$$

پریا امینی

۴-

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$$

دامنه رادیکال ها $\to x+1 \geq 0 \to x \geq -1$
$x-1 \geq 0 \to x \geq 1$ $\Big\}\ x \geq 1$

مخرج ها $\to \sqrt{x-1}+3 \neq 0 \to \sqrt{x-1} \neq -3$ همواره برقرار

$3-\sqrt{x-1} \neq 0 \to \sqrt{x-1} \neq 3 \to x-1 \neq 9 \to x \neq 10$

$\sqrt{x-1} \neq 0 \to x-1 \neq 0 \to x \neq 1$

پس $\to x > 1$ و $x \neq 10$

$t = \sqrt{x+1}$, $t^2 = x+1 \to x = t^2-1$
$z = \sqrt{x-1}$, $z^2 = x-1 \to z^2+1 = x$ $\Big\}$ طبق شرط های بالا $\Big\}\ t \geq 0,\ z > 0$

$t^2-1 = z^2+1 \to t^2-z^2 = 2$ ①

$$\underbrace{\frac{t}{z+3} - \frac{t}{3-z}} = \frac{z^2}{z}$$

اگر $z \neq 0 \to \frac{z^2}{z} = z$

$$\frac{t(3-z)-t(3+z)}{9-z^2} = \frac{t(\cancel{3}-z-\cancel{3}-z)}{9-z^2} = t\left(\frac{-2z}{9-z^2}\right)$$

$z \neq 0 \to \frac{-2t\cancel{z}}{9-z^2} = \cancel{z} \to \frac{-2t}{9-z^2} = 1 \to -2t = 9-z^2$ ②

① $t^2-z^2 = 2 \to z^2 = t^2-2$
② $-2t = 9-z^2 \to z^2 = 2t+9$ $\Big\}\ t^2-2 = 2t+9 \to t^2-2t-11 = 0$

$$t=\frac{2\pm\sqrt{4+44}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{2\pm4\sqrt{3}}{2}=1\pm2\sqrt{3}$$

$t=\sqrt{x+1}\to t\geq 0\to 1+2\sqrt{3}=t$ منفی غیرقابل قبول

$x=t^2-1\to$ $x=(1+2\sqrt{3})^2-1=1+12+4\sqrt{3}-1=$
$12+4\sqrt{3}\to$ یک ریشه مثبت دارد!

۵-

دامنه‌ها

رادیکال $\to 2-x\geq 0\to \boxed{2\geq x}$

مخرج $\to \sqrt{2-x}+2\neq 0\to \sqrt{2-x}\neq -2$ همواره برقرار

$2-\sqrt{2-x}\neq 0\to \sqrt{2-x}\neq 2\to 2-x\neq 4\to \boxed{x\neq -2}$

$$\sqrt{2-x}=t\to \frac{1}{t+2}-\frac{1}{2-t}=\frac{t^2}{5t}\to \frac{2-t-t-2}{4-t^2}=\frac{t^2}{5t}$$

$$\frac{-2t}{4-t^2}=\frac{t^2}{5t}\to 4t^2-t^4=-10t^2\xrightarrow{z=t^2}4z-z^2=-10z\to$$

$z^2-14z=0\to\begin{cases}z=0\to & \text{مخرج را صفر می‌کند} \quad \text{غ ق ق}\\ z=14\ \checkmark\end{cases}$

$t^2=14\to t=\sqrt{14}$

$\sqrt{2-x}=\sqrt{14}\to 2-x=14\to x=-12$ ریشه‌ی معادله ۱۲- است که منفی است و ما دنبال ریشه‌ی مثبت می‌گردیم که تعدادش صفر است.

پریا احسنی

-۶

دامنه $\to x \neq 0$

$(1-x)^2 \neq 0 \to x \neq 1$

$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{160}{9} \to \frac{(1-x)^2+x^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{160}{9} \to$

صورت $1-2x+x^2+x^2 = 2x^2-2x+1$

مخرج $x^2(1-x)^2 = (x(1-x))^2 = (x-x^2)^2$

$$\frac{2x^2-2x+1}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9}$$

$y = x - x^2$

$2x^2-2x = 2(x^2-x) = -2(x-x^2) = -2y$

$\frac{1-2y}{y^2} = \frac{160}{9} \to 9-18y = 160y^2 \to 160y^2+18y-9=0$

دارای دو ریشه y_1 و y_2

مجموع ریشه‌های y $\to \frac{-b}{a} = \frac{-18}{160} = \frac{-9}{80}$

$y = x-x^2 \Rightarrow x^2-x+y=0$

$y_1 \begin{cases} \to x_1 \\ \to x_2 \end{cases} \to x^2-x+y_1=0$

$x_1+x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$

$y_2 \begin{cases} \to x_3 \\ \to x_4 \end{cases} \Rightarrow x^2-x+y_2=0$

$x_3+x_4 = \frac{-(-1)}{1} = 1$

مجموع $= 1+1 = \boxed{2}$

۷ -

$$\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}}+\sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}}=x+2$$

$$-x^3+4x^2+25x-100\geq 0 \rightarrow -x^2(x-4)+25(x-4)\geq 0$$

$$(x-4)(25-x^2)\geq 0 \rightarrow (x-4)(5-x)(5+x)\geq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & -5 & & 4 & & 5 & \\ + & \vert & - & \vert & + & \vert & - \\ \text{ج} & & & \text{ج} & & & \end{array}$$

$$-x^2+6x-8\geq 0 \rightarrow x^2-6x+8\leq 0 \rightarrow (x-2)(x-4)\leq 0$$

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & & 4 & \\ + & \vert & - & \vert & + \\ & & \text{ج} & & \end{array}$$

اشتراک $\rightarrow [2,4]\cap\left((-\infty,-5]\cup[4,5]\right) \rightarrow$ ۴ تنها نقطه ی مشترک است.

جایگذاری ۴ $\rightarrow \sqrt{4+\sqrt{-(4)^3+4(4)^2+25(4)-100}}+\sqrt{4+\sqrt{0}}=2$

$$\underbrace{\sqrt{(4)^2+\sqrt{-(4)^2+6(4)-8}}}_{\sqrt{16+\sqrt{0}}=\sqrt{16}=4}=\underbrace{4+2}_{6} \rightarrow 6=6$$ معتبر است

$$\boxed{\text{تعداد جواب ها}=1}$$

پریا امینی

۸-

$y_1 = |x+2| + |x-1|$

$y_2 = \frac{17-x}{3}$

$y_1 \longrightarrow$

x	$x<-2$	$1>x>-2$	$x>1$
y	$-x-2-x+1 = -2x-1$	$x+2-x+1 = 3$	$x+2+x-1 = 2x+1$

نقاط تقاطع $\longrightarrow$

$x<-2 \to -2x-1 = \frac{17-x}{3} \to -6x-3 = 17-x \to -5x = 20 \to x = -4$ در بازه وجود دارد

$y = -2(-4)-1 = 8-1 = 7$ $\boxed{A(-4,7)}$

$-2 \le x \le 1 \to 3 = \frac{17-x}{3} \to 9 = 17-x \to x = 8$ در بازه قرار ندارد پس نقطه تقاطعی در این بازه نیست.

$x>1 \to 2x+1 = \frac{17-x}{3} \to 6x+3 = 17-x \to 7x = 14 \to$ در بازه وجود دارد

$x = 2,\ y = 2(2)+1 = 5$ $\boxed{B(2,5)}$

$AB = \sqrt{(2-(-4))^2 + (5-7)^2} = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

پریا حسینی

۹-

$y_1 = \sqrt{x^2 - 4x + 4} \rightarrow \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$

$$y_1 = \begin{cases} -x+2 & : x<2 \\ x-2 & : x \geq 2 \end{cases}$$

$y_2 = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$

نقاط برخورد $\rightarrow x<2 \rightarrow 2 - x = \frac{1}{2}x + 2 \rightarrow 4 - 2x = x + 4 \rightarrow$

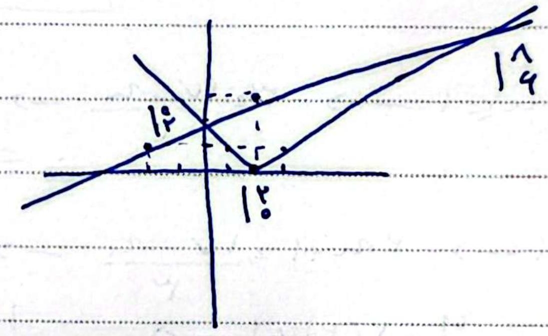
$3x = 0 \rightarrow x = 0 \; , y = 2 - (0) = 2$

در بازه وجود دارد

در بازه وجود دارد

$x \geq 2 \rightarrow x - 2 = \frac{1}{2}x + 2 \rightarrow 2x - 4 = x + 4 \rightarrow x = 8$

$, y = 8 - 2 = 6$



$$\begin{matrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

دترمینان $\rightarrow \dfrac{|0 + 16 + 12 - 0 - 0 - 4|}{2} = \dfrac{24}{2} = 12$

پریا احمدی

۱۰ ـ

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+9}=\frac{1}{20} \to$

بهروز در یک ساعت $\frac{1}{x}$ جلد را تمام می کند.

فرشاد $\frac{1}{x+9}$ " " .

$\frac{x+9+x}{x^2+9x}=\frac{1}{20} \to \frac{2x+9}{x^2+9x}=\frac{1}{20}$

$40x+180=x^2+9x \to$

$x^2-31x-180=0$

$(x-36)(x+5)=0$

$x=36$

$x=-5 \to$ زمان نمی تواند منفی باشد.

$x=36$

بهروز در یک ساعت $\to$ $\frac{1}{36}$ جلد تایپ می کند $\to$ در $\boxed{36}$ ساعت کل آن را تایپ می کند.