پریا امینی

۱۹

-۱

$۳x^۲ - ax + ٤ = ۰$

$x_۱ = \alpha ,\ x_۲ = ۳\alpha \longrightarrow S = \alpha + ۳\alpha = ٤\alpha ,\ P = \alpha \times ۳\alpha = ۳\alpha^۲$ ۲

$$۰ = x^۲ - Sx + P \longrightarrow x^۲ - ٤\alpha x + ۳\alpha^۲ = ۰ \xrightarrow{\times ۳} \left\{ \begin{array}{l} ۳x^۲ - ۱۲\alpha x + ۹\alpha^۲ = ۰ \\ ۳x^۲ - ax + ٤ = ۰ \end{array} \right.$$

$۳x^۲ - ax + ٤ = ۰$

$\underbrace{-a = -۱۲\alpha}$, $۹\alpha^۲ = ٤ \longrightarrow \alpha^۲ = \frac{٤}{۹} \xrightarrow{\sqrt{}} \alpha = \pm \frac{۲}{۳}$

$a = ۱۲\alpha \longrightarrow a_۱ = ۱۲ \times \frac{۲}{۳} = ۸ ,\ a_۲ = ۱۲ \times (-\frac{۲}{۳}) = -۸$

$|a_۲ - a_۱| = |-۸ - ۸| = |-۱۶| = \boxed{۱۶}$

-۲

$۳۶x^۲ - (m + ۱٤)x + ۱ = ۰ \qquad P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳۶} \qquad S = \frac{-b}{a} = \frac{m + ۱٤}{۳۶}$

$\sqrt{\frac{۱}{\alpha}} + \sqrt{\frac{۱}{\beta}} = ۵ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\frac{۱}{\alpha} + \frac{۱}{\beta}}_{\text{مخرج مشترک}} + ۲\sqrt{\frac{۱}{\alpha} \times \frac{۱}{\beta}} = ۲۵ \longrightarrow$ ۲

$\frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} + ۲\sqrt{\frac{۱}{\alpha\beta}} = ۲۵ \longrightarrow \frac{S}{P} + ۲\sqrt{\frac{۱}{P}} = ۲۵ \longrightarrow \frac{\frac{m + ۱٤}{۳۶}}{\frac{۱}{۳۶}} + ۲\sqrt{\frac{۱}{\frac{۱}{۳۶}}} = ۲۵$

$\frac{\cancel{۳۶}(m + ۱٤)}{\cancel{۳۶}} + \frac{۲ \times \sqrt{۳۶}}{۲ \times ۶} = ۲۵ \longrightarrow m + \underbrace{۱٤ + ۱۲}_{۲۶} = ۲۵ \longrightarrow m = -۱$

$mx^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \xrightarrow{m = -۱} -x^۲ + ۳x + ۲ = ۰$

حاصلضرب ریشه ها $= \frac{c}{a} = \frac{۲}{-۱} = \boxed{-۲}$

-۳

$4x^3+kx^2-9x-2=0$

$\alpha+\beta=1$

$\alpha\beta=-2$

۲

ریشه نا معلوم

$$4\underbrace{(x-\alpha)(x-\beta)}_{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}(x-\gamma)$$

$$4(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)(x-\gamma)\rightarrow 4[x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta))x-\alpha\beta\gamma]=0$$

$$4x^3-4(\alpha+\beta+\gamma)x^2+4(\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta))x-4\alpha\beta\gamma=0$$

$$\begin{cases}-4(\alpha+\beta+\gamma)=k\\ 4(\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta))=-9\\ -4\alpha\beta\gamma=-2\end{cases}\xrightarrow[\alpha+\beta=1]{\alpha\beta=-2}\begin{cases}-4(1+\gamma)=k\\ 4(-2+\gamma(1))=-9\\ -4(-2)\gamma=-2\end{cases}$$

① $4(-2+\gamma)=-9\rightarrow -8+4\gamma=-9\rightarrow 4\gamma=-1\rightarrow \gamma=-\frac{1}{4}$

② $8\gamma=-2\Rightarrow \gamma=-\frac{1}{4}$

$$k=-4(1+\gamma)=-4\left(1-\frac{1}{4}\right)=-4\left(\frac{3}{4}\right)=\boxed{-3}$$

۴-

۲

$x^2+6x+a=0$ $\alpha<\beta<0$

$3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85$

$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}=-6 \to \alpha+\beta=-6 \to \alpha=-6-\beta$

$3(-6-\beta)^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85 \to 3(36+\beta^2+12\beta)+2\beta^2=$

$12\sqrt{2}+85 \to 108+36\beta+3\beta^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85 \to$

$5\beta^2+36\beta+108-85-12\sqrt{2}=0 \to 5\beta^2+36\beta+(23-12\sqrt{2})=0$

$\alpha=-3-q\sqrt{2}$ $\beta=-3+q\sqrt{2}$

$\alpha^2=(-3-q\sqrt{2})^2=9+6q\sqrt{2}+2q^2$

$\beta^2=(-3-q\sqrt{2})^2=9-6q\sqrt{2}+2q^2$

$3\alpha^2+2\beta^2=12\sqrt{2}+85 \to 3(9+6q\sqrt{2}+2q^2)+2(9-6q\sqrt{2}+2q^2)$

$=12\sqrt{2}+85 \to 27+18q\sqrt{2}+6q^2+18-12q\sqrt{2}+4q^2=$

$12\sqrt{2}+85$

$$\begin{cases} \text{ثابت} \to 27+18=45 \\ \sqrt{2}\ \text{دار} \to 18q\sqrt{2}-12q\sqrt{2}=6q\sqrt{2} \\ q^2\ \text{دار} \to 6q^2+4q^2=10q^2 \end{cases}$$

$(45+10q^2)+(6q)\sqrt{2}=85+12\sqrt{2}$

$6q=12 \to q=2$ ⟶ }

$45+10q^2=85 \to 10q^2=40 \to q^2=4 \to q=\pm 2 \to$ } $q=2$

پریا امینی

ادامه ۴-

$$\left.\begin{aligned} &\alpha<\beta<0 \longrightarrow -3-q\sqrt{2}<-3+q\sqrt{2}<0 \\ &-q\sqrt{2}<q\sqrt{2} \longrightarrow 2q\sqrt{2}>0 \longrightarrow q>0 \\ &-3+q\sqrt{2}<0 \longrightarrow q\sqrt{2}<3 \Rightarrow q<\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\simeq 2{,}12 \end{aligned}\right\} 0<q<2{,}12$$

در رابطه قبلی $q=2$ و در شرط $0<q<2{,}12$ صدق می‌کند. قابل قبول

$$\frac{c}{a}=a=\alpha\beta \longrightarrow a=(-3-q\sqrt{2})(-3+q\sqrt{2})=(-3)^2-(q\sqrt{2})^2=$$

$$9-(q^2\cdot 2) \xrightarrow{q=2} 9-(4\times 2)=9-8=\boxed{1}$$

$$a=1 \longrightarrow x^2+6x+1=0$$

ریشه‌ها $= \dfrac{-6\pm\sqrt{36-4}}{2}=\dfrac{-6\pm\sqrt{32}}{2}=\dfrac{-6\pm 4\sqrt{2}}{2}=$

$-3\pm 2\sqrt{2}$

$\alpha=-3-2\sqrt{2}$

$\beta=-3+2\sqrt{2}$

پریا احسنی

۵- $2P^2 - 3SP + 2S = ?$

$x^4 - 7x^2 - 5 = 0$

$x^2 = t \longrightarrow t^2 - 7t - 5 = 0$

$\Delta = 49 - 4(1)(-5) = 69$

$t = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \longrightarrow \frac{7 - \sqrt{69}}{2} < 0$ غ ق ق

$t = x^2 > 0$

$t = \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} \longrightarrow P = \sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} \times \left(-\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}}\right)$

۲

$= \frac{-7-\sqrt{69}}{2}$

$S = \sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} - \sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} = 0$

$3SP = 0 \quad , \quad 2S = 0 \longrightarrow 2P^2 = 2\left(\frac{-7-\sqrt{69}}{2}\right)^2 = \cancel{2}\left(\frac{49+69+14\sqrt{69}}{\cancel{4}\,2}\right)$

$= \frac{\overset{59}{\cancel{118}} + \overset{7}{\cancel{14}}\sqrt{69}}{\cancel{2}} = \boxed{59 + 7\sqrt{69}}$

پریا امینی

-۶

1

$d: ۲x^۲ - ax + b = ۰ \qquad \alpha + ۰/۵ \;,\; \beta + ۰/۵$

$d': ۲ax^۲ + ax - ۶ = ۰ \qquad \alpha \;,\; \beta$

$d: S = \alpha + \beta + ۰/۵ + ۰/۵ = \alpha + \beta + ۱ \longrightarrow S = \frac{-b}{a} = \frac{a}{۲} = \alpha + \beta + ۱$

$d': S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-a}{۲a} = \frac{-۱}{۲}$

$\alpha + \beta = \frac{-۱}{۲} \longrightarrow \alpha + \beta + ۱ = \frac{-۱}{۲} + ۱ = \frac{۱}{۲} \longrightarrow \frac{a}{۲} = \frac{۱}{۲} \longrightarrow a = ۱$

$d: ۲x^۲ - x + b = ۰ \longrightarrow (\alpha + ۰/۵)(\beta + ۰/۵) = \alpha\beta + \frac{۱}{۲}\alpha + \frac{۱}{۲}\beta + \frac{۱}{۴}$

$d': ۲x^۲ + x - ۶ = ۰ \longrightarrow \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۶}{۲} = -۳$

$d: P = \overset{-۳}{\cancel{\alpha\beta}} + \frac{۱}{۲}\overset{-\frac{۱}{۲}}{\cancel{(\alpha + \beta)}} + \frac{۱}{۴} \longrightarrow -۳ - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = -\frac{۱۲}{۴} + \frac{۱}{۴} = -\frac{۱۳}{۴}$

$d: P = \frac{c}{a} = \frac{b}{۲} = \frac{-۱۳}{۴} \longrightarrow \frac{۲b}{۴} = \frac{-۱۳}{۴} \longrightarrow ۲b = -۱۳ \longrightarrow b = \frac{-۱۳}{۲}$

$\left[\frac{ab}{۴}\right] = \left[\frac{۱ \times \frac{-۱۳}{۲}}{۴}\right] = \left[\frac{\frac{-۱۳}{۲}}{\frac{۴}{۱}}\right] = \left[\frac{-۱۳}{۸}\right] = [-۱/۶۲۵] = \boxed{-۲}$

$۲x^۲ - ax + b = ۰ \begin{cases} S = \frac{a}{۲} \\ P = \frac{b}{۲} \end{cases} \qquad ۲ax^۲ + ax - ۶ \begin{cases} S = \frac{-۱}{۲} \rightarrow \alpha + \beta = \frac{۱}{۲} = \frac{a}{۲} \rightarrow a = ۱ \\ P = -۳ \rightarrow b = -۶ \end{cases}$

$\left[\frac{ab}{۴}\right] = -۲$

پریا امینی

۷-

۹

$ax^2 - ax - b = 0$

$40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17 \to 2\beta^2 + \alpha^2 - \beta = \frac{17}{20}$

$\alpha + \beta = \frac{-(-a)}{a} = \frac{a}{a} = 1 \to \alpha = 1 - \beta$

$\alpha\beta = \frac{-(+b)}{a} = \frac{-b}{a}$

$2\beta^2 + (1-\beta)^2 - \beta = \frac{17}{20} \to 2\beta^2 + 1 + \beta^2 - 2\beta - \beta = \frac{17}{20}$

$3\beta^2 - 3\beta \quad 1 = \frac{17}{20} \to 3\beta^2 - 3\beta + 1 - \frac{17}{20} = 0 \to$

$3\beta^2 - 3\beta + \left(\frac{20-17}{20}\right) = 0 \to 3\beta^2 - 3\beta + \frac{3}{20} = 0 \to$

$60\beta^2 - 60\beta + 3 = 0 \to 20\beta^2 - 20\beta + 1 = 0$ از آنجایی که ریشه های این معادله همان ریشه های معادله اصلی است پس حاصلضرب ریشه هایش هم همان است.

$(\alpha-\beta)^2 = \underbrace{\alpha^2 + \beta^2}_{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta} - 2\alpha\beta \to (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$\to \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{20} \to (\alpha-\beta)^2 = \cancel{(\alpha+\beta)^2}^{\,1} - 4\left(\frac{1}{20}\right) \to$

$1 - \frac{4}{20} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \to (\alpha-\beta)^2 = \frac{4}{5} \to (\alpha-\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}} =$

$\boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

۸- $x^2-(a+1)x+a=0 \quad \alpha, \alpha+2$

$P=\frac{c}{a}=\frac{a}{1}=\alpha(\alpha+2)=\alpha^2+2\alpha=a$

$S=-\frac{b}{a}=\frac{a+1}{1}=\alpha+\alpha+2=2\alpha+2=a+1 \rightarrow a=2\alpha+1$

د

$2\alpha+1=\alpha^2+2\alpha \rightarrow \alpha^2=1 \rightarrow \alpha=\pm 1 \xrightarrow{\text{طبیعی}} \alpha=1, a=3$

$x^2-(3a+1)x+b=0 \qquad \beta, \beta+2$

$S=\beta+\beta+2=2\beta+2=\frac{-b}{a}=\frac{3a+1}{1} \rightarrow 3a+1=2\beta+2 \rightarrow 3(3)+1$
$=2\beta+2 \rightarrow 10-2=2\beta \rightarrow \beta=4$

$P=\beta(\beta+2)=\beta^2+2\beta=\frac{c}{a}=b \rightarrow (4)^2+2(4)=24=b$

$|P_2-P_1|=|a-b|=|3-24|=21$

۹-

$x^2+x-1-m^2=0$

$S=\frac{-b}{a}=\frac{-1}{1}=-1$

$P=\frac{-1-m^2}{1}=-(1+m^2)$

$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=(-1)^2-2(-(1+m^2))=1+2+2m^2=2m^2+3$

$x_{min}=x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{-0}{4}=0$

د

$y_{min}=y_S=2(0)^2+3=\boxed{3}$

بررسی وجود ریشه ها در معادله:

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(-(1+m^2))\geq 0 \rightarrow 1+4(1+m^2)\geq 0$

$1+4+4m^2\geq 0 \rightarrow 5+4m^2\geq 0$ همواره برقرار قابل قبول ✓

۱۰ - ۹

$B(-5,y)$, $A(3,y)$ → عرضها یکسان

محور تقارن سهمی ← وسط AB

x راس $= \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$S\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right.$ راس

$y = a(x-h)^2+k \to y = a(x-(-1))^2+1 \to$

$y = a(x+1)^2+1 \xrightarrow{A(3,y)} y = a(3+1)^2+1 \to$

$y = a(4)^2+1 \to y = 16a+1$

ریشه‌ها $\to 0 = a(x+1)^2+1 \to a(x+1)^2 = -1 \to$

$(x+1)^2 = \frac{-1}{a} \to a(x^2+1+2x)+1 = 0$

راس سهمی $\to (-1,1)$ و سهمی محور x ها را قطع می‌کند

پس دهانه رو به پایین ← $a<0$

$\to ax^2+2ax+(a+1)=0$

$\alpha+\beta = \frac{-2a}{a} = -2$

$\alpha\beta = \frac{a+1}{a} = 1+\frac{1}{a}$

$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2(1+\frac{1}{a}) = 5 \to$

$4 - 2 - \frac{2}{a} = 5 \to -\frac{2}{a} = 3 \to -3a = 2 \to a = -\frac{2}{3}$

با شرط $a<0$ سازگار است.

$y = -\frac{2}{3}(x+1)^2+1 \xrightarrow{x=0} -\frac{2}{3}(0+1)^2+1 = -\frac{2}{3}+1 = \boxed{\frac{1}{3}}$ → سهمی محور y ها را در $(0, \frac{1}{3})$ قطع می‌کند