①

$$\begin{cases} 4A+B=2 \\ A+B=0 \end{cases} \Rightarrow 3A=2 \Rightarrow A=1 \Rightarrow B=-1$$

$x=1 \Rightarrow y=1$, $x=2 \Rightarrow y=9$

$f(0)=4^{B} \Rightarrow 4^{-1}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}$ ← تشکیک‌تابعی

②

$$\log_2^{(4^{x+1}+10)} = x+3 \Rightarrow \log_2^{(4^{x+1}+10)} = \log_2^{2^{x+3}} \Rightarrow 4^{x+1}+10 = 2^{x+3} \Rightarrow 2^{2x}+10=2^{x+3} \Rightarrow$$

$$2^{2x}-2^{x+3}+10=0 \Rightarrow 2^{2x}-2^x\times 2^3+10=0 \Rightarrow x^2-8x+10=0 \Rightarrow (x-3)(x-5)=0 \Rightarrow$$

$$2^x=5 \Rightarrow x=\log_2^5, \quad 2^x=2 \Rightarrow x=\log_2^2 \Rightarrow \log_2^2+\log_2^5 \Rightarrow \log_2^{10}$$

③

$$(\log_{21}^3)^2+\log_{21}^{147}\log_{21}^{343} \Rightarrow (\log_{21}^3)^2+\log_{21}^{147}\times(2\log_{21}^3+\log_{21}^{147}) = (\log_{21}^3)^2+2\log_{21}^3\log_{21}^{147}+(\log_{21}^{147})^2$$

$$(\log_{21}^3+\log_{21}^{147})^2 \Rightarrow (\log_{21}(3\times 147))^2 \Rightarrow (\log_{21}^{441})^2 \Rightarrow (\log_{21}21^2)^2 = 4$$

④

$$\log(x^2-2x+1)+2\log(1-x)=0, \quad \log_2^{-x}$$

$$x^2-2x+1\times(1-x)^2=10^0 \Rightarrow (1-x)^2\times(1-x)^2=10^0 \Rightarrow (1-x)^4=10^0 \Rightarrow 1-x=10^0 \Rightarrow x=-9$$

$$\log_4^9=2$$

⑤

$$\log_2^{(x^2+2x+4)}+\log_2(x-2)=3 \Rightarrow (x^2+2x+4)(x-2)=8 \Rightarrow (x^3-8)=8 \Rightarrow$$

$$x^3=16 \Rightarrow x=\sqrt[3]{16} \Rightarrow \log_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{16}} \Rightarrow \log_2^{16}=4$$

⑥

$$\log(2-x)-\log\frac{1}{(x-2)^2}=3 \Rightarrow (2-x)(x-2)^2=10^3 \Rightarrow -(x-2)(x-2)^2=10^3 \Rightarrow -(x-2)^3=10^3$$

$$2-x=10 \Rightarrow x=-8 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}^{8} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2^8=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$$

⑦

$$3^{x^2-2}=81^x \Rightarrow 3^{x^2-2}=3^{4x} \Rightarrow 3^{x^2-2}=3^{4x} \Rightarrow x^2-2=4x \Rightarrow x^2-4x-2=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{24}}{2} \Rightarrow \frac{4+\sqrt{24}}{2}, \frac{4-\sqrt{24}}{2} \Rightarrow \frac{4+2\sqrt{6}}{2}, \frac{4-2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \frac{2(2+\sqrt{6})}{2}, \frac{2(2-\sqrt{6})}{2} \Rightarrow$$

$$x-2>0 \Rightarrow x>2 \Rightarrow x=2+\sqrt{6}$$

$$\log_6^{2+\sqrt{6}-2} \Rightarrow \log_6^{\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{1}{2}\log_6^6=\frac{1}{2}$$

$\log^{۲}_{۴} = \frac{۱}{۸}$ , $\log^{۸}_{۱۸} \Rightarrow {}^{۳}\log^{۲}_{۱۸} \Rightarrow ۳\left(\frac{۱}{\log^{۱۸}_{۲}}\right) = ۳\left(\frac{۱}{\log^{۲}_{۲}+۲\log^{۳}_{۲}}\right) \overset{\star}{\Rightarrow} ۳\left(\frac{۱}{\frac{۱}{۳}+\frac{۱۲}{۳}}\right) = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۷}$ ⑧

$\log^{۲}_{۴} = \frac{۱}{\log^{۴}_{۲}} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \log^{۴}_{۲} = ۸ \star$

---

⑨

$\log^{۴}_{۴} = ۹\log^{۸}_{۴} \Rightarrow \log^{۴}_{۴} = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow ۲\log^{۲}_{۳} = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow \log^{۲}_{۳} = \frac{۵}{۸} \Rightarrow \log^{۳}_{۴} = \frac{۸}{۵} \star$

$\log^{۹}_{۱۲} \Rightarrow \frac{۱}{\log^{۱۲}_{۹}} \Rightarrow \frac{۱}{\log^{۲}_{۹}+\log^{۳}_{۹}} = \frac{۱}{\log^{۲}_{۹}+۱} = \frac{۱}{\frac{۵}{۱۳}+\frac{۱۳}{۱۳}} = \frac{۱۳}{۱۸}$

$\log^{۲}_{۹} = \frac{۱}{\log^{۹}_{۲}} = \frac{۱}{\log^{۲}_{۲}+\log^{۳}_{۲}} \Rightarrow \frac{۱}{\frac{۵}{۵}+\frac{۸}{۵}} = \frac{۵}{۱۳}$

---

⑩

$a\log ۲ - a + b\log ۲ \geq ۰ \Rightarrow a\log^{۲} + b\log ۲ \geq a \Rightarrow (a+b)\log ۲ \geq a \Rightarrow \frac{a+b}{a}\log ۲ \geq ۱$

$(۱+\frac{b}{a})\log ۲ \geq ۱ \quad = \frac{۱}{\log ۲} \geq ۱+\frac{۱}{a} \Rightarrow \log^{۱۰}_{۲} \geq ۱ + \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} \geq \log^{۱۰}_{۲} - ۱$

$(\sqrt{۲})^{\log^{۱۰}_{۲} - \log^{۲}_{۲}} \Rightarrow (۲)^{\frac{۱}{۲} \times \log^{۲}_{۲}} \Rightarrow ۲^{\log^{۲}_{۴}} \Rightarrow ۵^{\log^{۲}_{۴}} \Rightarrow (۵)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵}$