۱)

$f(x)=3^{Ax+B} \quad , \quad g(x): y=x^2$

$f(1)=3^{A+B} \quad , \quad g(1)=1^2=1 \xrightarrow{f(1)=g(1)} 3^{A+B}=1 \rightarrow A+B=0$

$f(3)=3^{3A+B} \quad , \quad g(3)=3^2 \xrightarrow{f(3)=g(3)} 3^{3A+B}=3^2 \rightarrow 3A+B=2$

$-\begin{cases} A+B=0 \quad (-A-B=0) \\ 3A+B=2 \end{cases} \rightarrow 2A=2 \rightarrow A=1 \;,\; B=-1 \rightarrow f(x)=3^{x-1} \xrightarrow{x=0} f(0)=3^{-1}=\frac{1}{3} \rightarrow (0,\frac{1}{3})$

۲)

$\log_2(4^x+15)=x+3 \Rightarrow 2^{x+3}=4^x+15 \rightarrow 2^x \times 8=4^x+15 \rightarrow$

$8\times 2^x=(2^x)^2+15 \rightarrow (2^x)^2-8\times 2^x+15=0 \xrightarrow{2^x=A} A^2-8A+15=0 \rightarrow$

$(A-3)(A-5)=0 \rightarrow \begin{cases} A=3 \rightarrow 2^x=3 \rightarrow x_1=\log_2 3 \\ A=5 \rightarrow 2^x=5 \rightarrow x_2=\log_2 5 \end{cases} \rightarrow x_1+x_2=\log_2 3+\log_2 5=\log_2 15$

۳)

$(\log_{21} 3)^2+\log_{21}(147)+\log_{21}(1323)=(\log_{21} 3)^2+\log_{21} 7^2\times 3+\log_{21} 21^2\times 3=$

$(\log_{21} 3)^2+(\log_{21} 21\times 7)\times(\log_{21} 21^2+\log_{21} 3) \stackrel{\star}{=}$

$\log_{21} 21\times 7=\log_{21} 21+\log_{21} 7=1+\log_{21}\frac{21}{3}=1+1-\log_{21} 3$

$\stackrel{\star}{=}(\log_{21} 3)^2+(2-\log_{21} 3)(2+\log_{21} 3)=(\log_{21} 3)^2+(4)-(\log_{21} 3)^2=4$

۴)

$\log(x^2-2x+1)+3\log(1-x)=5 \rightarrow \log_3(-x)=?$

$\log(x-1)^2+\log(1-x)^3=5 \rightarrow \log_{10}(1-x)^5=5 \rightarrow (1-x)^5=10^5 \Rightarrow 1-x=10 \rightarrow x=-9$

$\log_3(-x)=\log_3 9=2$

۵)

$\log_2(x^2+2x+4)+\log_2(x-2)=3 \rightarrow \log_{\sqrt[3]{2}} x=?$

$\log_2(x^2+2x+4)(x-2)=3 \rightarrow \log_2 x^3-8=3 \rightarrow x^3-8=8 \rightarrow x^3=16 \rightarrow x=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}$

$\log_{\sqrt[3]{2}} x=\log_{\sqrt[3]{2}} 2\sqrt[3]{2}=2$

Scanned with CamScanner

۶) $\log(۲-x) - \log\frac{۱}{(x-۲)^۲} = ۳ \rightarrow \log_{\sqrt{۲}}^{(-x)} = ?$ D: $۲-x>۰ \rightarrow x<۲$

$\log(۲-x) + \log(x-۲)^۲ = ۳ \Rightarrow \log(۲-x) + ۲\log|x-۲| = ۳ \xrightarrow{x<۲}$

$\log(۲-x) + ۲\log(۲-x) = ۳ \Rightarrow ۳\log(۲-x) = ۳ \Rightarrow \log(۲-x) = ۱ \rightarrow ۲-x = ۱۰ \rightarrow$

$x = -۸ \Rightarrow \log_{\sqrt{۲}}^{(-x)} = \log_{\sqrt{۲}}^{۸} = \log_{۲^{1/2}}^{۲^۳} = \frac{۳}{1/2} = ۶$

---

۷) $۳^{x^۲-۲} = ۸۱^{x} \rightarrow \log_{۶}^{(x-۲)} = ?$

$۳^{x^۲-۲} = ۳^{۴x} \rightarrow x^۲ - ۴x - ۲ = ۰ \rightarrow \Delta = ۲\sqrt{۶} \rightarrow \begin{cases} x_1 = ۲+\sqrt{۶} \\ x_2 = ۲-\sqrt{۶} < ۰ \end{cases}$ غ ق ق $\rightarrow$

$\log_{۶}^{x-۲} = \log_{۶}^{\sqrt{۶}} = \frac{۱}{۲}$

---

۸) $\log_{۳}^{۲} = \frac{۵}{۸} \rightarrow \log_{۱۸}^{۸} = ?$

$\log_{۱۸}^{۸} = \frac{\log_{۳}^{۸}}{\log_{۳}^{۱۸}} = \frac{۳\log_{۳}^{۲}}{\log_{۳}^{۲} + \log_{۳}^{۳^۲}} = \frac{۳\times\frac{۵}{۸}}{\frac{۵}{۸}+۲} = \frac{\frac{۱۵}{۸}}{\frac{۲۱}{۸}} = \frac{۱۵}{۲۱} = \frac{۵}{۷}$

---

۹) $\log_{۴}^{۳} = ۰/۸ \rightarrow \log_{۱۲}^{۶} = ?$

$\log_{۴}^{۳} = ۰/۸ \rightarrow \log_{۲}^{۳} = ۱/۶$; $\log_{۲}^{۶} = \log_{۲}^{۳\times۲} = \log_{۲}^{۲} + \log_{۲}^{۳} = ۱+۱/۶ = ۲/۶$

$\log_{۶}^{۲} = \frac{۱}{\log_{۲}^{۶}} = \frac{۱۰}{۲۶} = \frac{۵}{۱۳} \rightarrow \log_{۶}^{۱۲} = \log_{۶}^{۲} + \log_{۶}^{۶} = ۱ + \frac{۵}{۱۳} = \frac{۱۸}{۱۳}$

$\log_{۱۲}^{۶} = \frac{۱}{\log_{۶}^{۱۲}} = \frac{۱۳}{۱۸}$

---

۱۰) $\underbrace{(a\log ۲)}_{a}x^۲ + \underbrace{a}_{b}x + \underbrace{b\log ۲}_{c} = ۰ \longrightarrow (\sqrt{۲})^{\frac{b}{a}}$ ($\log_{۱۰}$)

$\xrightarrow{x=-۱} a\log ۲ - a + b\log ۲ = ۰ \rightarrow a(\log ۲ - ۱) + b\log ۲ = ۰ \rightarrow$

$a\log\frac{۲}{۱۰} + b\log ۲ = ۰ \rightarrow a\log ۰/۲ + b\log ۲ = ۰ \rightarrow b\log ۲ = -a\log ۰/۲$

$b = \frac{-a\log ۰/۲}{\log ۲} \rightarrow b = -a\log_{۲}^{۰/۲} \rightarrow (\sqrt{۲})^{\frac{b}{a}} = (\sqrt{۲})^{\frac{-a\log_{۲}^{۰/۲}}{a}} = (\sqrt{۲})^{\log_{۲}(۰/۲)^{-1}} =$

$(۰/۲)^{-1\,\log_{۲}^{\sqrt{۲}}} = ۵^{\log_{۲}^{۲^{1/2}}} = ۵^{1/2} = \sqrt{۵}$