$$f(x)=\begin{cases}(a+1)(x+۲) & x>1\\ ۳a+۲x & x\le 1\end{cases}\qquad ۲f(۵)=f(-۲)+a$$

$F(۵)=(a+1)(۵+۲)=۷a+۷$

$F(-۲)=۳a-۴$

$\rightarrow ۲(۷a+۷)=۳a-۴+a \rightarrow ۱۴a+۱۴=۳a-۴+a$

$۱۰a=-۱۸ \rightarrow a=-\frac{۱۸}{۱۰}$

جواب ۶

$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+۲ \rightarrow \sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\frac{1}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}+۲+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}+\frac{1}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}+۲=۲\left(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\right)+۴$

$\rightarrow \boxed{۲\sqrt{۶}+۴}$ جواب ۷

$F(۲-\sqrt{۳})+F(۲+\sqrt{۳})$

$\frac{1}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\times\left(\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\right)=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{\sqrt{۴-۳}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}\Rightarrow\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$

$\left(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\right)=\sqrt{۶}$

$\left(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}\right)^۲=۲+\sqrt{۳}+۲-\sqrt{۳}+۲\sqrt{۴-۳}=۶$

$۲F(x)-۳F(-x)=۴x^۲-x$

$x\rightarrow ۲F(x)-۳F(-x)=۴x^۲-x \quad \times ۲ \rightarrow ۴F(x)-۶F(-x)=۸x^۲-۲x$

$-x\rightarrow ۲F(-x)-۳F(x)=۴x^۲+x \quad \times ۳ \rightarrow ۶F(-x)-۹F(x)=۱۲x^۲+۳x$

$-۵F(x)=۲۰x^۲+x \rightarrow F(x)=-\frac{۲۰x^۲+x}{۵}$

$\boxed{-۴x^۲+\frac{1}{۵}x}$ جواب ۶ — ۸

$(x+۲)f(x)-۳xf(x+۲)=۴x^۲-mx+۳m-1 \qquad f(0)=\frac{۲۵}{۴}$

$x=0\rightarrow (۲)f(0)=۳m-1 \rightarrow ۲F(0)=۳m-1 \quad \times ۳ \rightarrow ۶F(0)=۹m-۳$

$x=-۲\rightarrow +۶F(0)=۱۶+۲m+۳m-1 \rightarrow ۶F(0)=۱۶+۵m-1 \qquad ۶F(0)=۱۵+۵m$

$۴m+۱۸=0 \rightarrow ۴m=۱۸ \rightarrow m=\frac{۱۸}{۴}=\frac{۹}{۲}$

$۲f(0)=۳\times\frac{۹}{۲}-1 \Rightarrow F(0)=\frac{\frac{۲۵}{۲}}{۲}=\frac{۲۵}{۴}$

جواب ۹

$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x}$

$ax+b+a\left(\frac{1}{x}\right)+b=\frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x}$

$ax+b+\frac{a}{x}+b=\frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x}$

$ax+۲b+\frac{a}{x}=\frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x}$

$ax+۲b+\frac{a}{x}=۳x-۱۲+\frac{۳}{x}$

$a=۳\ ,\ b=-۶$

$F(x)=ax+b \rightarrow F(x)=۳x-۶ \rightarrow F(-1)=\boxed{-۳-۶=-۹}$

راه دوم

$F(-1)$

$x=-1 \rightarrow F(-1)+f(-1)=\frac{۳+۱۲+۳}{-1}$

$\rightarrow ۲F(-1)=-۱۸ \rightarrow \boxed{F(-1)=-۹}$

۱۰)

۱۹,۷۵

نام و نام خانوادگی: بهار شهیدان — تالیف ۴ — دوره یازدهم دختر A

۱

الف) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}}$

$\frac{x^2+1-2x-x^2}{x^2-x}=\frac{1-2x}{x^2-x}\geq 0$

$0,\ \frac{1}{2},\ 1$: $+\ -\ +\ -$

$D=(-\infty,0)\cup[\frac{1}{2},1)$

ب) $f(x)=\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}}{\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}}$

$x+1\neq0 \to x\neq-1$

$x\neq0$

$x-1\neq0 \to x\neq1$

$x+2\neq0 \to x\neq-2$

$\frac{3x+6+x-1}{x^2+x-2}\neq0 \to 4x-5\neq0 \to x\neq-\frac{5}{4}$

$D=\mathbb{R}-\{-2,-\frac{5}{4},-1,0,1\}$

۲

$f(x)=\sqrt{((\frac{1}{3})^x-9)(32-4^x)}$

$((\frac{1}{3})^x-9)(32-4^x)\geq0$

$(\frac{1}{3})^x=9$ ، $((3)^{-1})^x=3^2 \to 3^{-x}=3^2 \to -x=2 \to x=-2$

$4^x=32 \to 2^{2x}=2^5 \to 2x=5 \to x=\frac{5}{2}$

$-2,\ \frac{5}{2}$: $+\ -\ +$

$D=(-\infty,-2]\cup[\frac{5}{2},\infty)$

ب) $\sqrt[4]{x-1}+\sqrt{y+1}=3$

$\sqrt{y+1}=-\sqrt[4]{x-1}+3$

$3-\sqrt[4]{x-1}\geq0 \to 3\geq\sqrt[4]{x-1}$

توان ۴ $\to 81\geq x-1 \to x\leq82$ ①

$\sqrt[4]{x-1} \to x-1\geq0 \to x\geq1$ ②

$D_1\cap D_2=[1,82]$

۳

$f(x)=\frac{\log_4(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1}$

$x^2-x-2>0 \to (x-2)(x+1)>0$: $+\ -\ +$

$\sqrt{x^2-1}+1\neq0 \to \sqrt{x^2-1}\neq-1$ ✓ → هیچ وقت صفر نخواهد شد

$x^2-1\geq0 \to x^2\geq1 \to x\geq1 \quad x\leq-1$

$D=(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$

۱,۷۵

۴

$\sqrt{3+ax-x^2}$ ، $D=[-2,b]$ ، $a+b=$

$-x^2+ax+3\geq0$

① ریشه‌ها $x_1=-2,\ x_2=b$

$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \to b-2=-\frac{a}{-1} \to b-2=a$

$P=x_1\times x_2=\frac{c}{a} \to -2\times b=\frac{3}{-1} \to 2b=3 \to b=\frac{3}{2}$

$\to a=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2} \to a+b=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1$

۵

$f(x)=\begin{cases}3x-2 & x\geq1\\ 2x+3 & x<1\end{cases}$

$g(x)=\sqrt{f(x)-x} \to f(x)\geq x$

① $x\geq1 \to 3x-2\geq x \to 2x\geq2 \to x\geq1$

② $x<1 \to 2x+3\geq x \to x\geq-3 \Rightarrow -3\leq x<1$

$D_g \to (x\geq1)\cup(-3\leq x<1) \to x\geq-3$

$D_g=[-3,\infty)$