تکلیف شماره ۴   * ترنم کسائیان

۲۰

① ←

الف)

$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x+1}} \Rightarrow x\neq 0,\ x\neq 1$ ①

② $\frac{x-1}{x} \geq \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{1-2x}{x^2-x} \geq 0 \rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & \frac{1}{2} & & 1 & \\ + & | & - & | & + & | & - \end{array} \Rightarrow$$

① ∩ ② $\rightarrow D_f=(-\infty,0)\cup[\frac{1}{2},1)$

۵

ب)

$f(x)=\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}}{\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x+2}} \rightarrow x\neq -2,\ x\neq -1,\ x\neq 0,\ x\neq 1$ ①

② $\frac{3}{x-1}\neq\frac{1}{x+2} \Rightarrow \frac{4x+5}{(x-1)(x+2)}\neq 0 \rightarrow x\neq -2,\ x\neq -\frac{5}{4},\ x\neq 1$

① ∩ ② $\rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-2,-\frac{5}{4},-1,0,1\}$

② الف) $f(x)=\sqrt{\left((\frac{1}{3})^x-9\right)(32-4^x)} \Rightarrow \left((\frac{1}{3})^x-9\right)(32-4^x)\geq 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccccc} & -2=\log_{\frac{1}{3}}9 & & \frac{5}{2}=\log_4 32 & \\ + & | & - & | & + \end{array} \Rightarrow D_f=(-\infty,-2]\cup[\frac{5}{2},+\infty)$$

۵

ب) $\sqrt{y+1}=3-\sqrt[4]{x-1} \rightarrow$ ① $x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$

② $\sqrt[4]{x-1}\leq 3 \Rightarrow x-1\leq 81 \rightarrow x\leq 82 \Rightarrow$ ① ∩ ② $\rightarrow D_f=[1,82]$

③ مخرج همواره مثبت ، $x^2-x-2>0 \rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} & -1 & & 2 & \\ + & | & - & | & + \end{array}$$ ①

② $x^2-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1,\ x\leq -1 \longrightarrow$ ① ∩ ② $\rightarrow D_f=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

۵

④ $x=-2 \longrightarrow 3-2a-4=0 \longrightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$\longrightarrow -x^2-\frac{1}{2}x+3 \rightsquigarrow x=\frac{b^2\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{\frac{49}{4}}$

$x=\frac{\frac{1}{2}\pm\frac{7}{2}}{-2} \Rightarrow x=-2,\ x=\frac{3}{2}$

۵

$\Longrightarrow b=\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{a+b=1}$

۵

$f(x)-x\geq ۰ \Rightarrow f(x)\geq x \xrightarrow{x\geq ۱} ۳x-۲\geq x \Rightarrow x\geq ۱$ برقرار است

$x<۱ \Rightarrow ۲x+۳\geq x \Rightarrow x\geq -۳$

$\Rightarrow D_f=[-۳,+\infty)$

۶

$f(۵)=(a+۱)\times ۷ \Rightarrow ۲f(۵)=۱۴a+۱۴ \xrightarrow{۲f(۵)=f(-۲)+a}$

$f(-۲)+a=۱۴a+۱۴\ ,\ f(-۲)=۳a-۴ \Rightarrow$

$۴a-۴=۱۴a+۱۴ \Rightarrow ۱۰a=-۱۸ \Rightarrow a=-\frac{۱۸}{۱۰}=-۱٫۸$

۷

$\frac{۱}{\underbrace{۲+\sqrt{۳}}_{\to a}}=۲-\sqrt{۳} \Rightarrow f(a)+f\left(\frac{۱}{a}\right)=۲\times\left(\sqrt{a}+\frac{۱}{\sqrt{a}}\right)+۴$

$\Rightarrow ۲\Big(\underbrace{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}}_{\sqrt{۶}}\Big)+۴=\boxed{۲\sqrt{۶}+۴}$

۸

$$\left.\begin{array}{l} ۲f(x)-۳f(-x)=۴x^۲-x \\ ۲f(-x)-۳f(x)=۴x^۲+x \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} ۴f(x)-۶f(-x)=۸x^۲-۲x \\ + \\ ۶f(-x)-۹f(x)=۱۲x^۲+۳x \end{array}\right.$$

$\Rightarrow -۵f(x)=۲۰x^۲+x \Rightarrow f(x)=\frac{۲۰x^۲+x}{-۵}$

۹

$x=۰ \Rightarrow ۲f(۰)=۳m-۱ \xRightarrow{\times ۳} ۶f(۰)=۹m-۳$

$x=-۲ \Rightarrow ۶f(۰)=۱۶+۲m+۳m-۱ \Rightarrow ۱۵+۵m=۹m-۳ \Rightarrow$

$۴m=۱۸ \Rightarrow m=۴٫۵ \Rightarrow ۲f(۰)=\frac{۲۷-۲}{۲}=\frac{۲۵}{۲} \Rightarrow$

$f(۰)=\frac{۲۵}{۴}$

$f(x)+f\left(\frac{۱}{x}\right)=\frac{۳x^۲-۱۲x+۳}{x} \xrightarrow{x=-۱} ۲f(-۱)=(۳+۱۲+۳)-۱$ ۱۰

$\Rightarrow ۲f(-۱)=-۱۸ \longrightarrow \boxed{f(-۱)=-۹}$