[redacted]

رنیا دریاجی — یازدهم یکشنبه A — تکلیف ۵

۱)

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-1$

$y=\sqrt{x^3 f(x+1)} \Rightarrow x^3 f(x+1) \geq 0$

$\Rightarrow \sqrt{x^3\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}-1\right)} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} & 0 & & 1 & \\ - & | & + & | & - \end{array} \Rightarrow D_f=[0,1]$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=1 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

---

۲)

$f(x)=\sqrt{x+|x+2|} \Rightarrow x+|x+2| \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+x+2\geq 0 \Rightarrow 2x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -1 \\ x-x-2\leq 0 \Rightarrow -2\leq 0 \end{cases}$

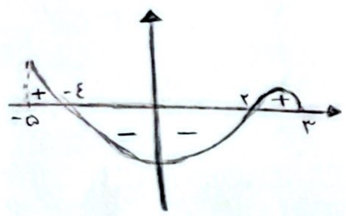
$f(-x)=?$

$\Rightarrow D_f=[-1,+\infty) \to f(x)$

$\Rightarrow D_{f(-x)}=\boxed{(-\infty,1]} \xleftarrow{\text{چون}} -x\geq -1 \Rightarrow x\leq 1$

---

۳)



$y=\sqrt{\frac{x-1}{f(x)}} \Rightarrow \frac{x-1}{f(x)} \geq 0$

$-5, -4, 2, 3$

$\begin{array}{cccccc} -5 & -4 & 1 & 2 & 3 & \\ & - & + & - & + & \end{array}$

$\Rightarrow D_f=\boxed{(-4,1]\cup(2,3)}$

---

۴)

$$\begin{array}{l|l} 9x^4-7x^2-4x-3 & 3x^2+ax+b \\ -9x^4-3x^3a-3x^2b & 3x^2-ax+1 \\ \hline -3ax^3-x^2(7+3b)-4x-3 & \\ +3ax^3+a^2x^2+abx & \\ \hline x^2(a^2-7-3b)+x(ab-4)-3=0 & \\ -3x^2-ax-b & \end{array}$$

$\Rightarrow \sqrt{-(a+b)}=\sqrt{-(-1-3)}=\sqrt{4}=2$

$\Rightarrow b=-3,\ a^2-3b-7=3 \Rightarrow a^2+9-7-3=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=+1 ✗ ,\ -1 ✓$

$a=ab-4 \Rightarrow a=-3a-4 \Rightarrow -4a=+4 \Rightarrow a=-1 ✓$

---

۵)

$f(x)=x^3+x \qquad f\left(\frac{4}{x}\right) \Rightarrow \frac{64}{x^3}+\frac{4}{x}$

$y=\sqrt{f(x)-f\left(\frac{4}{x}\right)} \Rightarrow f(x)-f\left(\frac{4}{x}\right)\geq 0 \Rightarrow x^3+x-\frac{64}{x^3}-\frac{4}{x}\geq 0 \Rightarrow \frac{x^6+x^4-4x^2-64}{x^3}\geq 0$

$\xrightarrow{x^2=t} t^3+t^2-4t-64=(t-4)\underbrace{(t^2+5t+16)}_{\text{همیشه مثبت}} \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2$

$\Rightarrow \frac{(x^2-4)(x^4+5x^2+16)}{x^3}\geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^3}\geq 0 \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} & -2 & & 0 & & 2 & \\ - & & + & & - & & + \end{array} \Rightarrow D_f=\boxed{[-2,0)\cup[2,+\infty)}$

---

۶)

$f(x^3+x)=2x^2-1 \xrightarrow{x^3+x=t} f(t)=2x^2-1 \Rightarrow \begin{cases} x^3+x=2 \Rightarrow x^3+x-2=0 \Rightarrow x=1 \\ x^3+x=10 \Rightarrow x^3+x-10=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$

$f(2)+f(10)=?$

$\Rightarrow f(2)=2-1=1 ,\ f(10)=2(4)-1=8-1=7$

$\Rightarrow f(2)+f(10)=7+1=\boxed{8}$

۷

$$f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۲x$$
$$g(x) = x^{۳} + ۹x^{۲} + ۲۷x$$
$$\frac{g(\sqrt[۳]{۷} - ۳)}{f(\sqrt[۳]{۲} + ۲)} = ? \Rightarrow \frac{-۲۰}{۱۰} = -۲$$

$$f(x) = (x-۲)^{۳} + ۸ \quad t = \sqrt[۳]{۲} + ۲ \Rightarrow t - ۲ = \sqrt[۳]{۲}$$
$$(\sqrt[۳]{۲})^{۳} + ۸ = ۲ + ۸ = ۱۰$$
$$g(x) = (x+۳)^{۳} - ۲۷ \Rightarrow (\sqrt[۳]{۷})^{۳} - ۲۷ = ۷ - ۲۷ = -۲۰$$
$$\sqrt[۳]{۷} - ۳ = t \Rightarrow t + ۳ = \sqrt[۳]{۷}$$

۸

$$t = \sqrt{x-۴}, \quad x \geq ۴ \Rightarrow t \geq ۰ \text{ و } x = t^{۲} + ۴$$
$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{t^{۲} + ۴ + ۴t} = \sqrt{(t+۲)^{۲}} = t + ۲$$
$$g(x) = \sqrt{t^{۲} + ۴ - ۴t} \Rightarrow \sqrt{(t-۲)^{۲}} = |t-۲|$$
$$f(x) + g(x) = \begin{cases} t + ۲ + t - ۲ = ۲t \\ -t + ۲ - t + ۲ = ۴ \end{cases}$$
$$f(x) + g(x) = ۲t = ۲\sqrt{x-۴} = a + b\sqrt{x+c} \Rightarrow a = ۰, \ b = ۲, \ c = -۴$$
$$\Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{۰+۲}{-۴} = -\frac{۱}{۲}$$

۹

$$f(x) = \frac{x+۲}{x^{۲} - ۴x + ۳} \Rightarrow \begin{cases} f(۲) = \frac{۴}{۴-۸+۳} = -۴ \\ f(۱) = \frac{۳}{۱-۴+۳} \Rightarrow \times \text{ ت ن} \\ f(۳) = \frac{۵}{۹-۱۲+۳} \Rightarrow \text{ ت ن } \times \\ f(۰) = \frac{۲}{۳} \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(x) = \{(۲, -۴)(۰, \tfrac{۲}{۳})\}$$
$$g(x) = \{(۲,۱)(۱,۰)(۳,۵)(۰,۴)\}$$
$$\frac{g}{f} = ? \Rightarrow \{(۲, \tfrac{۱}{-۴})(۰, ۶)\}$$

۱۰

$$f(x) = \{(۱,۲),(۳,-۱),(۴,۲),(-۱,۶)\}$$
$$g(x) = \{(۱,-۱),(۳,۲),(-۲,۳),(-۱,۰)\}$$

الف) $f(۲x) = \{(\tfrac{۱}{۲},۲)(\tfrac{۳}{۲},-۱)(۲,۲)(-\tfrac{۱}{۲},۶)\}$

ب) $f(x^{۲}) = \{(\pm۱,۲)(\pm\sqrt{۳},-۱)(\pm\sqrt{۴},۲)\}$

ج) $۲g^{۲}(x)+۱ = \{(۱,۳)(۳,۹)(-۲,۱۹)(-۱,۱)\}$

د) $\frac{۲f}{g} = \{(۱,-۴)(۳,-۱)\}$