۱۹٫۲۵

نام و نام خانوادگی ......حسینی...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۹... کلاس ...یازدهم ریاضی A......

۱

$f(x)=\begin{cases}\cot\frac{\pi x}{4} & : x\le 1\\ \sqrt{x^2+1} & : x>1\end{cases} \Rightarrow f\circ f(\frac{2}{3})=?=\frac{2}{4}$

$\Rightarrow f(f(\frac{2}{3}))=f(\sqrt{3})=\sqrt{\sqrt{3}^2+1}=2$ ($\sqrt{3}>1$)

$\frac{2}{3}<1 \to \cot\pi\frac{2}{3\times4}=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

۲

۲

الف) $f\circ g(\frac{\pi}{3}) \to g(\frac{\pi}{3})=2\cos^2(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{4}$)

$g(x)=2\cos^2 x$

$f(\frac{1}{x})=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} \Rightarrow \frac{1}{x}=t \to x=\frac{1}{t} : \sqrt{\frac{\frac{2}{t}-1}{\frac{1}{t^2}}}=\sqrt{t(2-t)}=\sqrt{2t-t^2}$ $\Big\} \Rightarrow \sqrt{2\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) $f\circ g(\sqrt{2}) \to g(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \xrightarrow{\times(1+\sqrt{2})} \frac{\sqrt{2}+2}{-1}=-\sqrt{2}-2$

$g(x)=\frac{x}{1-x}$

$f(x)=[x] \Rightarrow f(-\sqrt{2}-2)=[-\sqrt{2}-2]=-4$ ($\approx1{,}4 \to -3{,}4$)

۲

۳

$f(x)=\sin x$

$g(x)=x\sqrt{1-x^2}$

$g\circ f(\frac{\pi}{4}) \to f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{1-\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

۲

۴

$f(x)=\{(4,5),(2,5),(8,12),(10,12)\}$, $g(x)=\{(4,6),(2,4),(6,8),(8,10)\}$

الف) $f\circ g(x)=\{(4,5),(2,5),(6,12),(8,12)\}$

ب) $g\circ f(x)=\{\ \}=\emptyset$

ج) $f\circ f(x)=\{\ \}=\emptyset$

د) $g\circ g(x)=\{(4,8),(2,6),(6,10)\}$

۲

۵

$f=\{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\}$, $g=\{(1,2),(3,1),(a,3),(b,1)\}$

$(4,2)\in f\circ g$, $(4,1)\in g\circ f \to (a,b)=?$

$\Rightarrow f\circ g=\{(1,1),(3,7),(a,2),(b,7)\}$

$(4,2) \Rightarrow \underline{a=4}$

$\Rightarrow g\circ f=\{(2,2),(4,1)\}$

$4 \to x \to 1$

$\underline{b=5}$

$\Rightarrow (a,b)=(4,5)$

۲

gof خطی

$fof = ۴x+۳ \Rightarrow a(ax+b)+b = ۴x+۳ \ : \ a^۲x+(ab+b) = ۴x+۳$

$g(۲x+۳) = ۳x-۲$

$\Rightarrow a^۲ = ۴ \ : \ a = \pm ۲ \begin{cases} +۲ & ۳b = ۳ \ : \ \underline{b=۱} \\ -۲ & -b = ۳ \ : \ \underline{b=-۳} \end{cases}$

$\Rightarrow gof(-۱) = ?$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} ۲x+۱ \\ -۲x-۳ \end{cases}$

$۲x+۳ = t$

$۲x = t-۳ \rightarrow x = \frac{t-۳}{۲} \ : \ g(t) = ۳\left(\frac{t-۳}{۲}\right) - ۲ = \frac{۳t-۹-۴}{۲} \Rightarrow g(x) = \frac{۳x-۱۳}{۲}$

$\Rightarrow gof(-۱) = \begin{cases} -۱ \Rightarrow -۲+۱ = -۱ \\ -۱ \Rightarrow ۲-۳ = \underline{-۱} \end{cases}$

$\Rightarrow g(-۱) = \frac{۳(-۱)-۱۳}{۲} = -\frac{۱۶}{۲} = \underline{-۸}$

۲

۶

$f(x) = \sqrt{x+|x|} \rightarrow |x|+x \geq ۰ \rightarrow |x| \geq -x \Rightarrow$ همیشه! $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{۱}{x^۲-۴x} \rightarrow x^۲-۴x \neq ۰ \ : \ x(x-۴) \neq ۰ \Rightarrow \ \neq ۰, ۴$

$D_{gof} = ? \Rightarrow gof = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \ , \ \sqrt{x+|x|} \in (۰,+\infty) - \{۸\}\}$

۲

۱) $\Rightarrow \sqrt{x+|x|} \neq ۰ \ : \ |x| \neq -x \Rightarrow x > ۰.$

$\Rightarrow D_{gof} = (۰,+\infty) - \{۸\}$

۲) $\Rightarrow \sqrt{x+|x|} \neq ۴ \ : \ x+|x|-۱۶ \neq ۰ \ : \begin{cases} ۲x \neq ۱۶ ✓ & x \geq ۰ \\ ۰ \neq ۱۶ & x < ۰ \end{cases} \rightarrow x \neq ۸ \ \overset{\cap}{\Rightarrow} \ \mathbb{R} - \{۸\} \rightarrow D_g = (۰,+\infty) - \{۸\}$

۷

$f(x) = \sqrt{۱-x^۲} \rightarrow \begin{array}{ccc} -۱ & & ۱ \\ - & + & - \end{array} \Rightarrow \underline{D_f = [-۱,۱]}$

$g(x) = \sqrt{x} \rightarrow D_g = [۰,+\infty)$

۱,۷۵

$D_{(f+g)of} = ? \Rightarrow D_{(f+g)of} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f+g}\} \Rightarrow \{x \in [-۱,۱] \mid \underbrace{۰ \leq}_{\text{همیشه} ✓} \sqrt{۱-x^۲} \leq ۱\}$

$D_f \cap D_g \rightarrow \underline{[۰,۱]}$

$\Rightarrow D_{(f+g)of} = \cancel{[۰,۱]}$ $[-۱,۱]$

$\sqrt{۱-x^۲} \leq ۱$

$\Rightarrow ۱-x^۲ \leq ۱ \rightarrow -x^۲ \leq ۰$

$\Rightarrow x^۲ \geq ۰ : \Rightarrow$! همیشه ✓

۸

الف) $f\left(\frac{۳x+۱}{x-۲}\right) = ۴x+۵ \ : \ ۳x+۱ = tx-۲t$

$x(۳-t) = -۲t-۱ \rightarrow x = \frac{۲t-۱}{۳-t}$

$\Rightarrow f(t) = \frac{۴(۲t-۱)}{\cancel{۳-t} \ t-۳} + ۵ = \frac{۸t-۴+۱۵-۵t}{۳-t} = \frac{۳t+۱۱}{۳-t} \Rightarrow f(x) = \cancel{\frac{۳x+۱۱}{۳-x}}$ $\frac{13x-11}{x-3}$

۱,۵

ب) $f\left(x+\frac{۱}{x}\right) = x^۳+\frac{۱}{x^۳} \ : \ \left(x+\frac{۱}{x}\right)^۳ = x^۳+۳x+۳/x+\frac{۱}{x^۳} \Rightarrow x^۳+\frac{۱}{x^۳}+۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)$

$\Rightarrow f(x) = x^۳-۳x$

۹

$g(x) = \{۱, ۲\sqrt{۲}\}$

$f(x) = x\sqrt{x}$

$\Rightarrow$ ۱) $x\sqrt{x} = ۱ \xrightarrow{(\ )^۲} x^۳ = ۱ \rightarrow \underline{x=۱}$

۲) $x\sqrt{x} = ۲\sqrt{۲} \xrightarrow{(\ )^۲} x^۳ = ۸ \rightarrow \underline{x=۲}$

$\Rightarrow ۲-۱ = ۱$

$gof(x) \rightarrow$ [illegible]؟

۲

۱۰