نام و نام خانوادگی ....[illegible].... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۹... کلاس ...[illegible]...

۱

$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{4} & ; x \leq 1 \\ \sqrt{x^2+1} & ; x > 1 \end{cases}$ $\qquad f \circ f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow f(\sqrt{3}) = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{4} = 2$

۲

الف) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} \qquad g(x) = 2\cos^2 x \qquad f \circ g\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos^2 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{if } x = 2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2(2)-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) $f(x) = [x] \qquad g(x) = \frac{x}{1-x} \qquad f \circ g(\sqrt{2})$

$g(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{1-2} = -2-\sqrt{2} \Rightarrow f(-2-\sqrt{2}) = [-2-\sqrt{2}]$

$\Rightarrow [-\sqrt{2}] - 2 = -2-2 = -4$

۳

$f(x) = \sin x \qquad g(x) = x\sqrt{1-x^2} \qquad g \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{2}{4}$

$= \frac{1}{2}$

۴

$f(x) = \{(4,5),(6,5),(8,12),(10,12)\} \qquad g(x) = \{(4,6),(2,4),(6,8),(8,10)\}$

الف) $f \circ g(x) = \{(4,5),(2,5),(6,12),(8,12)\}$

ب) $g \circ f(x) = \varnothing$

ج) $f \circ f(x) = \varnothing$

د) $g \circ g(x) = \{(4,8),(2,6),(6,10)\}$

۵

$f = \{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\} \qquad g = \{(1,2),(3,1),(a,3),(b,1)\}$

$(4,2) \in f \circ g \qquad (4,1) \in g \circ f \qquad g(\underbrace{f(4)}_{5}) = 1 \Rightarrow b = 5$

$(a,b) = ? \Rightarrow (4,5)$

$f(g(4)) = 2 \Rightarrow g(4) = 3 \Rightarrow a = 4$

$۲x+۳=-۱ \Rightarrow ۲x=-۴ \Rightarrow x=-۲$

۶

$f(f(x)) = ۴x+۳ \qquad g(۲x+۳) = ۱۲x-۲$

$g\circ f(-۱) = ? \Rightarrow \begin{cases} f(-۱) = ۲(-۱)+۱ = -۱ \\ f(-۱) = -۲(-۱)-۳ = -۱ \end{cases} \Rightarrow g(-۱) = \underbrace{۳(-۲)}_{-۶} - ۲ = -۸$

$f(x) = ax+b \Rightarrow fof = a(ax+b)+b = a^۲x+ab+b = ۴x+۳$

$\Rightarrow a^۲=۴ \Rightarrow a=\pm ۲$, $ab+b=۳ \begin{cases} a=۲ \Rightarrow ۳b=۳ \Rightarrow b=۱ \\ a=-۲ \Rightarrow -b=۳ \Rightarrow b=-۳ \end{cases}$

۷

$f(x)=\sqrt{x+|x|} \qquad g(x)=\frac{۱}{x^۲-۴x}$

$D_f \Rightarrow x+|x| \geq ۰$

$a+|a| \geq ۰ \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

$D_g \Rightarrow x^۲-۴x \neq ۰$

$x(x-۴) \neq ۰$

$x \neq ۰ \quad x \neq ۴$

$D_g = \mathbb{R} - \{۰, ۴\}$

$D_{g\circ f} = (۰,+\infty) - \{۸\}$

$\Updownarrow$

$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$x \neq ۸ \Leftarrow x+|x| \neq ۱۶ \Leftarrow \sqrt{x+|x|} \neq ۴$

$\star\ f(x) \in D_g$

$\Updownarrow$

$f(x) \neq ۰, ۴$

$\Updownarrow$

$x \neq \mathbb{R}^-, ۰, ۸$

۸

$f(x)=\sqrt{۱-x^۲} \qquad g(x)=\sqrt{x}$ ✓ $R_f \subseteq [-۱,۱]$

$D_{(f+g)\circ f} \subseteq [-۱,۱] \Leftarrow D(f+g)\circ f$

$D_{(f+g)\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f+g}\}$

$R_f \Rightarrow y = ۱-x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱-y \Rightarrow ۱-y \geq ۰ \Rightarrow y \leq ۱$

$D_f = ۱-x^۲ \geq ۰ \Rightarrow ۱ \geq x^۲ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱ \Rightarrow D_f = [-۱,۱]$

$R_f = [۰,۱]$

$D_g = x \geq ۰ \Rightarrow [۰,+\infty)$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-۱,۱] \cap [۰,+\infty) = [-۱,۱] \Rightarrow R_f \subseteq [-۱,۱]$

۹

الف) $f\left(\frac{۳x+۱}{x-۲}\right) = ۴x+۵$

$\frac{۳x+۱}{x-۲} = t \Rightarrow tx-۲t = ۳x+۱ \Rightarrow tx-۳x = ۱+۲t \Rightarrow x(t-۳) = ۱+۲t$

$\Rightarrow x = \frac{۱+۲t}{t-۳} \Rightarrow f(t) = ۴\left(\frac{۱+۲t}{t-۳}\right)+۵ = \frac{۴+۸t+۵t-۱۵}{t-۳} = \frac{۱۳t-۱۱}{t-۳} \Rightarrow f(x) = \frac{۱۳x-۱۱}{x-۳}$

ب) $f(x+\frac{۱}{x}) = x^۲+\frac{۱}{x^۲} \Rightarrow f(t) = t^۲-۲(t) \Rightarrow f(x)=x^۲-۲x$

$x+\frac{۱}{x}=t \Rightarrow (x+\frac{۱}{x})^۲ = x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲x+\frac{۲}{x} \Rightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲} = (x+\frac{۱}{x})^۲ - ۲(x+\frac{۱}{x})$

۱۰

$f(x) = x\sqrt{x} \qquad g(f(x))$

if $x = ۱, ۲\sqrt{۲} \Rightarrow g(x) = ۰$

$\Updownarrow$

$f(x)=۱ \Rightarrow x\sqrt{x}=۱ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow ۲-۱=۱$

$f(x)=۲\sqrt{۲} \Rightarrow x\sqrt{x} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x=۲$