۱.

$F(F(\frac{۲}{۳}))$ $\cot \frac{\pi \frac{۲}{۳}}{۴} = \cot \frac{۱}{۶}\pi \Rightarrow \sqrt{۳}$

$F(\sqrt{۳})$ $\sqrt{(\sqrt{۳})^۲+۱} = ۲$

---

۲ . الف)

$F(g(\frac{\pi}{۳})) \Rightarrow g(\frac{\pi}{۳}) = ۲(\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲}$

$F(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\frac{۲(۲)-۱}{۶}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

ب)

$F(g(\sqrt{۲})) = \frac{\sqrt{۲}}{۱-\sqrt{۲}} \times \frac{۱+\sqrt{۲}}{۱+\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}+۲}{۱-۲} = \frac{\sqrt{۲}+۲}{-۱} = -۲-\sqrt{۲} \Rightarrow F(-۲-\sqrt{۲}) = -۴$

$[-۲-\sqrt{۲}]$

---

۳)

$g(F(\frac{\pi}{۴})) \Rightarrow F(\frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$g(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{۱-\frac{۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\sqrt{\frac{۲}{۴}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

---

۴)

الف) $۴ \xrightarrow{g(x)} ۶ \xrightarrow{g(x)} ۵$

$۲ \to ۴ \to ۵$

$۶ \to ۸ \to ۱۲$

$۸ \to ۱۰ \to ۱۲$

$\Rightarrow Fog(x) = \{(۴,۵),(۲,۵),(۶,۱۲),(۸,۱۲)\}$

ب) $۴ \xrightarrow{F(x)} ۵$

$۶ \to ۵$ $g \circ F(x) = \varnothing$

$۸ \to ۱۲$

$۱۰ \to ۱۲$

ج) $۴ \xrightarrow{F(x)} ۵ \times$

$۶ \to ۵ \times$ $Fof(x) = \varnothing$

$۸ \to ۱۲ \times$

$۱۰ \to ۱۲ \times$

د) $۴ \xrightarrow{g(x)} ۶ \xrightarrow{g(x)} ۸$

$۲ \to ۴ \to ۶$

$۶ \to ۸ \to ۱۰$

$۸ \to ۱۰$

$g \circ g(x) = \{(۴,۸),(۲,۶),(۶,۱۰)\}$

---

۵)

$۲ \xrightarrow{F(x)} ۱ \to ۲$

$۳ \to ۲$

$۴ \to a \to ۱ \to (b,۱)$ $b = ۵$

$۱ \to ۷$

b gof

$۱ \to ۲ \to ۱$

$۳ \to ۱ \to ۷$

$a \to ۳ \to ۲ \to (۴,۲) = (a,۲)$ $۴ = a$

$b \to ۱ \to ۷$

$(a,b) = (۴,۵)$

۶

$a(ax+b)+b = 4x+3$

$a^2x+ab+b = 4x+3 \Rightarrow a=2 \;,\; b=1 \Rightarrow g = 2x+1$

$c(2x+3)+b = 3x-2 \Rightarrow 2cx+3c+b = 3x-2 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \quad b = -\frac{13}{2} \Rightarrow f' = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

$g(F(-1)) = f(1)+1 = -1 \Rightarrow g(-1) = \frac{3}{2}(-1) - \frac{13}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{13}{2} = -\frac{16}{2} = \boxed{-8}$

۷

$x \in D_F : F(x) \in D_g$

$D_F = \sqrt{x+|x|}$

↳ $\sqrt{x+|x|} \neq 0$ ↳ $x \neq 0$

$\sqrt{x+|x|}$ ✓

$x \neq 0$

$= D_F = R^+$

$\frac{1}{x^2-4x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$

$x \neq 4$

$\boxed{D_{g\circ F} = (0,4) \cup (4,+\infty)}$

۸

$x \in D_F : F(x) \in D_{F\circ g} \Rightarrow D_F = -1 \leq x \leq 1$

↳ $1-x^2 \geq 0$

$F(x) \in D_{F\circ g} \Rightarrow [0,1]$

$D_F = [-1,1]$

$D_g = (0,+\infty)$

$0 \leq F(x) \leq 1$

↳ $0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$\boxed{[-1,1]}$

---

۱۰ (ب)

$\frac{3x+1}{x-2} = T \Rightarrow 3x-2T = 3x+1 \Rightarrow x-3x = 2T+1$

$x(T-3) = 2T+1 \Rightarrow x = \frac{2T+1}{T-3}$

$F(t) = 4\left(\frac{2T+1}{T-3}\right)+5 = \frac{8T+4}{T-3} + \frac{5T-15}{T-3} = \frac{13T-11}{T-3} \Rightarrow F(x) = \boxed{\frac{13x-11}{x-3}}$

۱۱

$x+\frac{1}{x} = T \qquad T^3 = x^3 + 3x^2\frac{1}{x} + 3x\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

$\Rightarrow T^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \Rightarrow T^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow F(x) = T^3 - 3T \Rightarrow F(x) = \boxed{x^3 - 3x}$

۱۰

$g(1) = 0 \qquad g(2\sqrt{2}) = 0$

$g(F(x)) = 0$

$\Rightarrow F(x) = 1 \Rightarrow x\sqrt{x} = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$

$F(x_2) = 2\sqrt{2} \Rightarrow x\sqrt{x} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = 4}$

$\boxed{|x_1 - x_2| = 3}$