هلیا عقاری

1)

$R(x^3-4) \to (a^3-4, +\infty)$

$R(12x-20) \to (-\infty, 12a-20]$

$\Rightarrow 12a-20 \leq a^3-4 \to a^3-4-12a+20 \geq 0$

$a^3-12a+16 \geq 0 \xrightarrow[x-2]{\text{بخش بر}}$

	1	0	-12	16
2	1	2	-8	0

$\Rightarrow (a-2)(a^2+2a-8) = (a-2)(a+4)(a-2) \geq 0$

	-4		2^*	
$-$		$+$		$+$

$\Rightarrow a = [-4, +\infty)$

2)

$f(x) = 3x+k, \quad f^{-1}(2) = 4 \to 3(4)+k = 2$

$\Rightarrow 12+k = 2 \Rightarrow k = -10 \Rightarrow f(x) = 3x-10$

الف) $f(7) = 3\times 7 - 10 = 21-10 = \boxed{11}$

ب) $f(f(x)) = 3(3x-10)-10 = 9x-30-10 = \boxed{9x-40}$

۳

$$f(x)=\frac{ax}{x-1} \rightarrow f(a)=\frac{a^2}{a-1}=2a$$

$$a^2=2a^2-2a \rightarrow a^2-2a=0 \Rightarrow a=0, 2$$

$$f^{-1}(x)=y=\frac{ax}{x-1} \xrightarrow{\text{معکوس}} x=\frac{ay}{y-1} \rightarrow xy-x=ay \rightarrow xy-ay=x$$

$$\Rightarrow y(x-a)=x \rightarrow y=\frac{x}{x-a} \xrightarrow{x=2a} \underbrace{\frac{2a}{2a-a}}_{a\neq 0}=a$$

$$\Rightarrow \boxed{a=2}$$

۴

الف) $f^{-1}(x)=\{(5,3)(7,6)(2,7)(4,9)\}$

$$g^{-1}(x)=\{(2,3)(6,8)(5,9)\}$$

الف) $f\circ f^{-1}=f(f^{-1}(x))=\{(5,5)(7,7)(2,2)(4,4)\}$

ب) $f^{-1}(f(x))=\{(3,3)(6,6)(7,7)(9,9)\}$

ج) $f(g^{-1}(x))=\{(2,5)\cancel{(3,6)}(5,4)\}$

د) $g^{-1}(f(x))=\{(3,9)(7,3)(9,8)\}$

۵

$$g^{-1}=\{(1,2)(3,6)(5,4)\}$$

$$f(g^{-1}(x))=\{(1,6)(3,8)(5,0)\}$$

$$\frac{h}{f\circ g^{-1}}=\{(1,\tfrac{2}{6})(3,\tfrac{6}{8})\cancel{(5,\tfrac{1}{0})}\}$$

(۶)

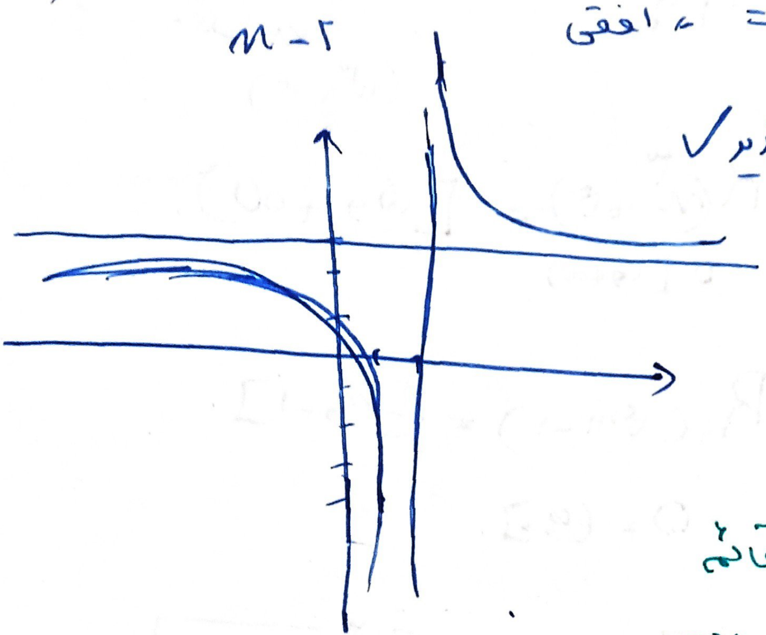
$2a=4$ $\quad \frac{3x+1}{x-2}$

مجانب قائم $=2$

افقی $=3$

$y=\frac{3x+1}{x-2}$

معکوس پذیر ✓

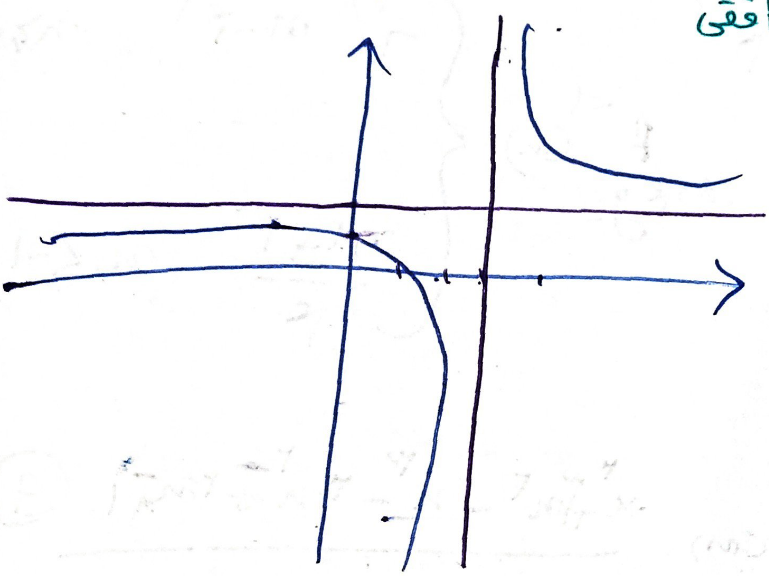


معکوس $\Rightarrow x=\frac{3y+1}{y-2}=x$

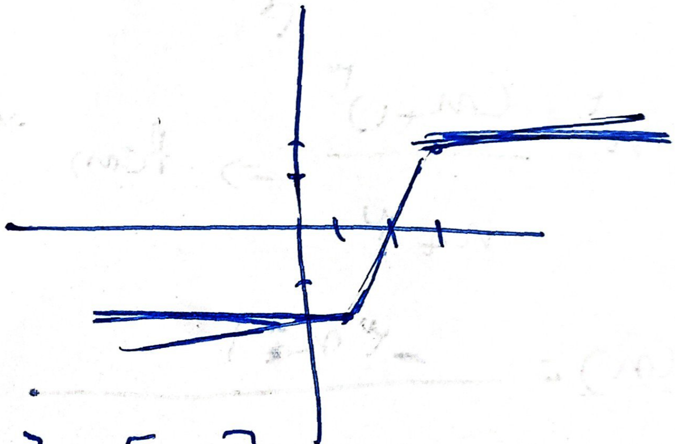
$y=+\frac{+2x+1}{x-3}$

$3=$ مجانب قائم

مجانب افقی $=2$



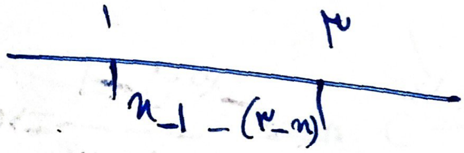
(۷)



$f(x)=|x-1|-|x-3|$

$x=1,3$

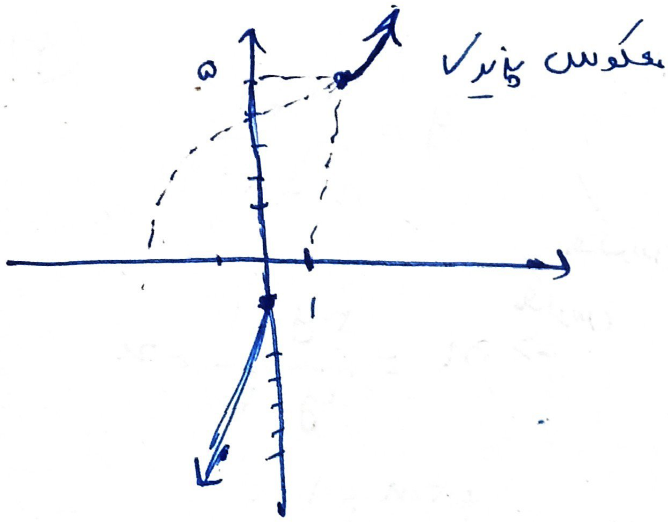
$[a,b]=[1,3]$



$y=2x-4 \xrightarrow{\text{معکوس}} x=2y-4$

$\Rightarrow 2y=x+4 \Rightarrow y=\boxed{\frac{x+4}{2}}$

$y=x-1+x-3=2x-4$



$R(x^3+4)=D$ معکوس (x^3+4) 1

$R(x^3+4)=[5,+\infty)$

$D\ [1,+\infty)$

$R(4x-1)=(-\infty,-1]$

$D=(-\infty,0]$

$y=x^3+4 \xrightarrow{\text{معکوس}} x=y^3+4$

$\Rightarrow y^3=x-4 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x-4}$

$y=4x-1 \xrightarrow{\text{معکوس}} x=4y-1 \Rightarrow 4y=$

$\Rightarrow 4y=x+1 \Rightarrow y=\frac{x+1}{4}$

$$f^{-1}(x)\begin{cases}\sqrt[3]{x-4} & x\geq 5\\ \frac{x+1}{4} & x\leq -1\end{cases}$$

$f(x)=x^2-\frac{(x+1)^3}{x+3} \Rightarrow f(x)=\frac{x^3+3x^2-x^3-3x^2-3x-1}{x+3}$ 9

$\Rightarrow f(x)=\frac{-3x-1}{x+3} \rightarrow y=\frac{-3x-1}{x+3} \rightarrow$

$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{-3y+1}{y+3}=x \Rightarrow \cancel{y=\frac{-3x+1}{x+4}} \Rightarrow y=\frac{-3x-1}{x+3}$

$=y=\frac{-9x-2}{3x+9} \rightarrow f^{-1}(-2)=\frac{-3(-2)-1}{3-2}=\frac{6-1}{1}=\boxed{5}$

۱۰

$$y=\frac{x}{x^2+1} \xrightarrow{\text{معکوس}} x=\frac{y}{y^2+1} \to xy^2+x=y \to xy^2-y+x=0$$

$$\Delta = 1-4x^2$$

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-4x^2}}{2x} \qquad 1-4x^2\geq 0 \qquad 4x^2\leq 1 \qquad x^2\leq\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{x^2+1}\xrightarrow{x=1} \cancel{y=\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

چون تابع اولیه به ازای ۱ ، $\frac{1}{2}$ میدهد پس معکوس تابع باید به ازای $\frac{1}{2}$ ، ۱ بدهد

همینطور چون تابع اصلی به ازای ۱- ، $-\frac{1}{2}$ میدهد پس معکوس تابع به ازای $-\frac{1}{2}$ باید ۱- بدهد.

$$f^{-1}(x)\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x} & 0<x<\dfrac{1}{2}\\[2ex] \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x} & -\dfrac{1}{2}<x<0\end{cases}$$