

تکلیف ۷، ۲۸
مبتدا شرفی گروه B

$$f(u) = \begin{cases} u^2 - r & : u > a \\ 12u - r_0 & : u \leq a \end{cases}$$

۱. گروهی را یونیفرمی کنید تا باج

$$f(u) = \begin{cases} u^2 - r & u > a \\ 12u - r_0 & u \leq a \end{cases}$$

$$\frac{u}{y} \mid \frac{a}{a^2 - r}$$

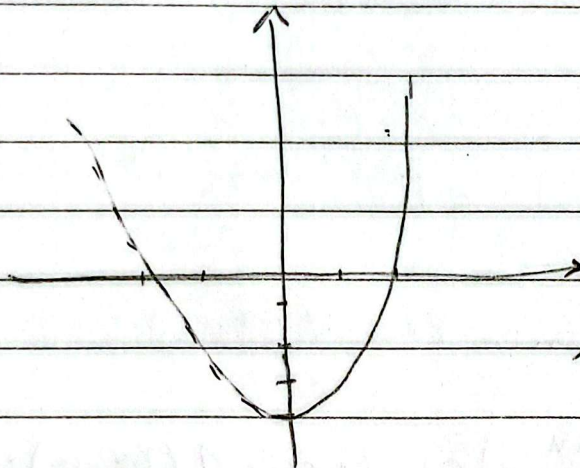
یک به یک است

$$\frac{u}{y} \mid \frac{a}{12a - r_0}$$

۱۲۵

$$u_s = \frac{-b}{ra} = 0$$

$$y_s = -r$$



همه برای یک به یک عدد
حرف $a > u$ قیاس آید $f(u)$ عدد بود
رأس را بگیریم $0 \leq a$

$$12a - r_0 \leq a^2 - r \quad 0 \leq a^2 - 12a + 12$$

$$\Delta = 10 \quad a = \frac{12 \pm \sqrt{10}}{2} = 6 \pm \sqrt{10}$$

$$-\infty \quad 6 - \sqrt{10} \quad 6 + \sqrt{10} \quad +\infty$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \mid \quad \mid \quad \mid \\ 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \Rightarrow a \in [6 - \sqrt{10}, 6 + \sqrt{10}] \cup [6 + \sqrt{10}, +\infty)$$

۲. اگر $f(n) = 3n + k$ و $f(2) = 4$ باشد آنگاه مقادیر f شده را بدست آورید

شده را بدست آورید

الف) $f(7)$

$$f(n) = 3n + k \Rightarrow f(2) = 4$$

$$(2, 4) \in f \rightarrow (2, 2) \in f$$

$$\rightarrow 2 = 3(2) + k \Rightarrow k = -10$$

$$f(n) = 3n - 10$$

$$f(7) = 3(7) - 10 = 11$$

$$ب) f(f(n)) = 3f(n) - 10 = 3(3n - 10) - 10 = 9n - 40$$

۳. اگر نقطه $A(r, a)$ روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ باشد مقادیر a را بدست آورید

$$(a, r) \in f \rightarrow ra = \frac{a(a)}{a-1} \rightarrow$$

$$ra = \frac{a^2}{a-1} \rightarrow ra(a-1) = a^2 \Rightarrow ra^2 - ra = a$$

$$a^2 - ra = 0 \quad a(a-r) = 0 \rightarrow a = 0 \quad \text{یا} \quad a = r$$

اگر $a = 0$ $f(n) = 0$ تابع ثابت می شود

و در این صورت

۴ - اگر توابع f و g را به صورت $f = \{(3,5), (4,7), (7,2), (9,6)\}$ و $g = \{(3,2), (4,6), (5,9), (7,1)\}$ فرض کنیم، مقادیر $f \circ g^{-1}$ و $g \circ f^{-1}$ را بیابید.

الف) $f \circ f^{-1} = \{(4,4), (2,2), (7,7), (5,5)\}$

ب) $f^{-1} \circ f = \{(3,3), (4,4), (7,7), (9,9)\}$

ج) $f \circ g^{-1} = \{(2,5), (5,4)\}$

$g^{-1} = \{(2,3), (4,8), (5,9)\}$

د) $g^{-1} \circ f = \{(3,9), (7,3), (9,8)\}$

۵ - اگر $f = \{(2,4), (4,8), (8,6)\}$ و $g = \{(2,3), (3,5), (5,2)\}$ و $h = \{(1,2), (2,4), (4,5), (5,1)\}$ را داشته باشیم، حاصل $f \circ g^{-1} \circ h$ را بیابید.

$f = \{(2,4), (4,8), (8,6)\}$

$g = \{(2,3), (3,5), (5,2)\} = g^{-1} = \{(3,2), (5,3), (2,5)\}$

$h = \{(1,2), (2,4), (4,5), (5,1)\}$

$f \circ g^{-1} = \{(3,4), (5,8), (2,6)\}$

$D \cap D = \{1, 3, 5\}$

$h = \{(1, \frac{1}{2}), (2, \frac{1}{4}), (3, \frac{1}{8}), (4, \frac{1}{16}), (5, \frac{1}{32})\}$

جواب: $\{(1, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{4})\}$



۶- تابع $y = \frac{3x+1}{x-2}$ را در نظر بگیرید. معکوس پذیری تابع را

به کمک شکل بررسی کنید پس ضابطه‌ی تابع معکوس را بدست

آورده و نمودار معکوس این تابع را رسم کنید

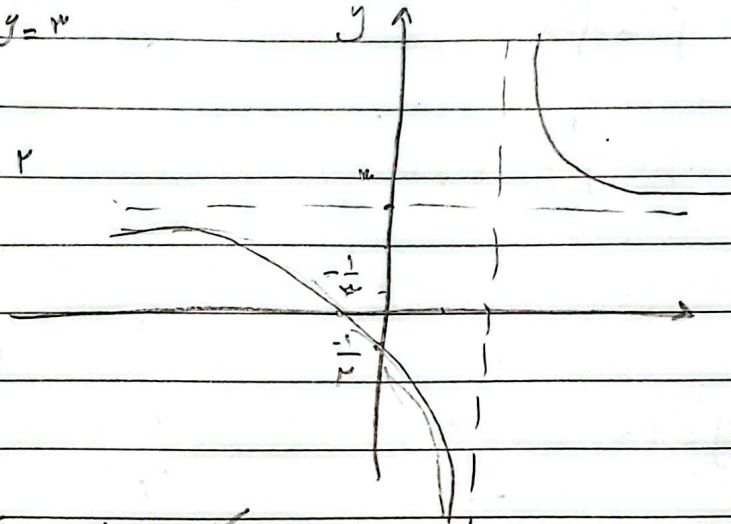
$$y = \frac{3x+1}{x-2}$$

$$y = 3$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \text{ (مخرج)}$$

$$x=0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$y=0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

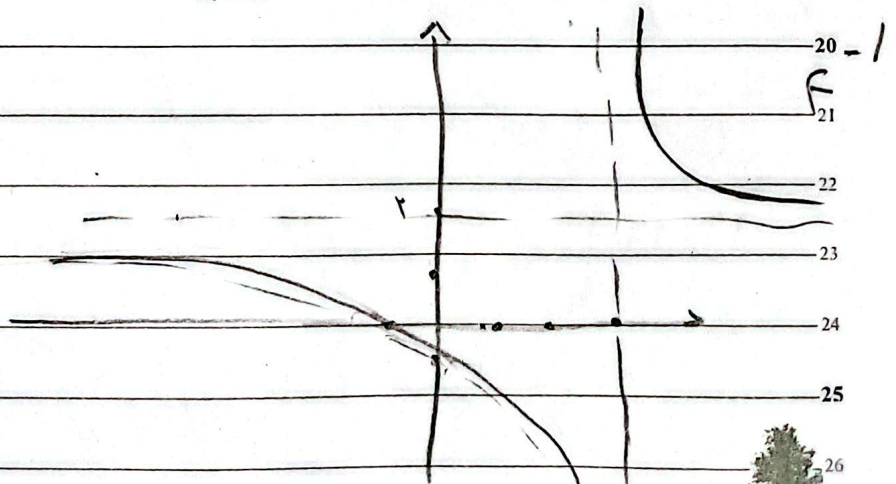


عرض افقی نمودار تابع را در یک نقطه قطع کند پس یک به یک است و معکوس دارد

$$y(x-2) = 3x+1 \Rightarrow xy - 2y = 3x+1$$

$$xy - 3x = 1 + 2y \Rightarrow x(y-3) = 1+2y \rightarrow$$

$$x = \frac{1+2y}{y-3} \rightarrow y = \frac{1+2x}{x-3} = f^{-1}(x)$$



۱- تابع $f(x) = |x-1| - |x-3|$ در بازه $[a, b]$ وارون پذیر

است اگر طول این بازه حداکثر مقدار ممکن باشد. ضابطه تابع معکوس در این بازه

$$f(x) = |x-1| - |x-3|$$

$\downarrow$
 $x=1$

$\downarrow$
 $x=3$

$y=$

$$-x+1+x-3=-2 \quad x \leq 1$$

$$x-1+x-3=2x-4 \quad 1 < x \leq 3$$

$$x-1-x+3=2$$

ثابت وارون ندارد

	1	3
$x-1$	-	+
$x-3$	-	+

$$f(x) = 2x-4, \quad x \in [1, 3]$$

x	1	3
y	-2	2

$$y = 2x-4 \rightarrow 2x = y+4 \Rightarrow x = \frac{y}{2} + 2 \rightarrow y = \frac{x}{2} + 2 = f(x)$$

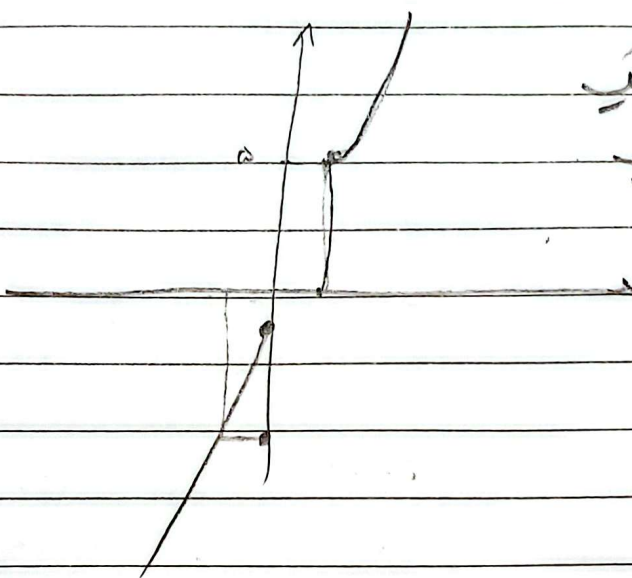
$$f(x) = \frac{x}{2} + 2, \quad x \in [-2, 2]$$

۸- وارون پذیری تابع $f(u) = \begin{cases} u^2 + 4 & u \geq 0 \\ 4u - 1 & u < 0 \end{cases}$ را بررسی کنید

در صورت امکان ضابطه ی وارون تابع را بدست آورید

$$f(u) = \begin{cases} u^2 + 4 & u \geq 0 \\ 4u - 1 & u < 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} u & 0 & -1 & -\infty \\ \hline y & 4 & -5 & \end{array}$$



فقط انتی وارون دارد
نقطه ی پیوستگی ندارد
است و متوسل ندارد

(۱, ۵)

۱) ضابطه $y = u^2 + 4 \rightarrow u^2 = y - 4 \rightarrow u = \pm \sqrt{y - 4}$

۲) $u = \sqrt{y - 4} \rightarrow y = u^2 + 4 = f(u) = u \geq 0$ برداشت f

۳) ضابطه $y = 4u - 1 \Rightarrow 4u = y + 1 \Rightarrow u = \frac{y + 1}{4}$

$y = \frac{u + 1}{4} = f(u) = 0 \quad u \leq -1$
برداشت f

$f(u) = \begin{cases} \sqrt{u - 4} & u \geq 0 \\ \frac{u + 1}{4} & u \leq -1 \end{cases}$



مربع

$$F(u) = u^r - \frac{(u+1)^r}{u+r}$$

۹- ضابطه دار و رنج تابع

$$f^{-1}(b) \text{ را بدست آوریم} \quad f^{-1}(u) = \frac{au+b}{ru+d}$$

$$F(u) = u^r - \frac{(u+1)^r}{u+r} = \frac{u^r(u+r) - (u^r + r u^{r-1} + \dots + 1)}{u+r}$$

۵

$$= f(u) = \frac{-ru-1}{u+r}$$

$$y = \frac{-ru-1}{u+r} \rightarrow y(u+r) = -ru-1$$

$$uy + ry = -ru-1 \Rightarrow uy + ru = -1 - ry$$

$$u(y+r) = -1 - ry \rightarrow u = \frac{-1-ry}{y+r}$$

$$y = \frac{-1-ry}{u+r} = f(u) = \frac{au+b}{ru+d} = \frac{-r-ry}{ru+y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -r \\ b = -1 \\ d = r \end{cases} \quad f^{-1}(-r) = \frac{-1-r(-r)}{-r+r} = \infty$$

بنا



۱. ضابطه‌ی معکوس تابع f را ضابطه‌ی

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}$$

لاگرت آید $\frac{1}{2x} \leq 1$

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

مثلاً $x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{2}{5}$

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \Delta = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow x = 2 \text{ or } x = \frac{1}{2}$$

پس هم برای $x = \frac{1}{2}$ و هم برای $x = 2$ جواب y می‌شود

$\frac{2}{5}$ پس تابع یک به یک نیست پس معکوس ندارد

