

مبتدا شرفی گروه B

تکلیف ۷، ۲۸

$$f(u) = \begin{cases} u^2 - 4 & : u > a \\ 12u - 20 & : u \leq a \end{cases}$$

۱. گروهی a را بیفزای منتهی بسند که تابع

$$f(u) = \begin{cases} u^2 - 4 & u > a \\ 12u - 20 & u \leq a \end{cases}$$

$$\frac{u}{y} \mid \frac{a}{12a-20}$$

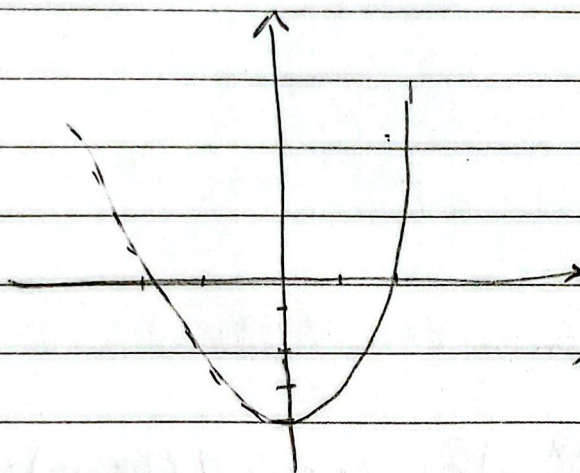
یک به یک باشد

۵. تفاضل باشد

$$\frac{u}{y} \mid \frac{a}{12a-20}$$

$$u_s = \frac{-b}{ra} = 0$$

$$y_s = -4$$



۱۱. برای یک به یک عدد
۱۲. چون $a > 0$ تفاضل باشد
۱۳. رأس را بگیریم $0 \leq a$

$$12a - 20 \leq a^2 - 4 \quad 0 \leq a^2 - 12a + 16$$

$$\Delta = 10 \quad a = \frac{12 \pm \sqrt{10}}{2} = 6 \pm \sqrt{10}$$

$$-\infty \quad 6 - \sqrt{10} \quad 6 + \sqrt{10} \quad +\infty$$

$$+ \quad - \quad + \Rightarrow a \in [6 - \sqrt{10}, 6 + \sqrt{10}] \cup [6 + \sqrt{10}, +\infty)$$



۲. اگر $f(n) = 3n + k$ و $f(2) = 4$ باشد آنگاه مقادیر f خواسته

شده را بدست آورید

الف) $f(7)$

$$f(n) = 3n + k \Rightarrow f(2) = 4$$

$$(2, 4) \in f \rightarrow (2, 2) \in f$$

$$\rightarrow 2 = 3(2) + k \Rightarrow k = -10$$

$$f(n) = 3n - 10$$

$$f(7) = 3(7) - 10 = 11$$

ب) $f(f(n)) = 3f(n) - 10 = 3(3n - 10) - 10 = 9n - 40$

۳. اگر نقطه $A(r, a)$ روی وارون f تابع $f(n) = \frac{an}{n-1}$ باشد مقادیر a

$$(a, ra) \in f \rightarrow ra = \frac{a(a)}{a-1} \rightarrow$$

$$ra = \frac{a^2}{a-1} \rightarrow ra(a-1) = a^2 \Rightarrow ra^2 - ra = a$$

$$a^2 - ra = 0 \quad a(a-r) = 0 \rightarrow \begin{matrix} a=0 \times \\ a=r \end{matrix}$$

اگر $a=0$ $f(n) = 0$ تابع ثابت می شود

وارون ندارد

۴ - اگر توابع f و g را به صورت $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \leq 0 \\ x^2 + 4 & x > 0 \end{cases}$ فرض کنیم، مقادیر $f \circ g$ و $g \circ f$ را در هر دو صورت $x \leq 0$ و $x > 0$ محاسبه کنید.

$$f \circ g^{-1} = \{ (4, 4), (2, 2), (7, 7), (5, 5) \} \text{ الف}$$

$$f \circ f^{-1} = \{ (9, 9), (7, 7), (4, 4), (3, 3) \} \text{ ب}$$

$$f \circ g^{-1} = \{ (2, 5), (5, 4) \} \text{ ج}$$

$$g^{-1} = \{ (2, 3), (4, 8), (5, 9) \}$$

$$g \circ f^{-1} = \{ (3, 9), (7, 3), (9, 8) \}$$

۵ - اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \leq 0 \\ x^2 + 4 & x > 0 \end{cases}$ فرض کنیم، مقادیر $f \circ g^{-1}$ و $g \circ f^{-1}$ را در هر دو صورت $x \leq 0$ و $x > 0$ محاسبه کنید.

$$f = \{ (2, 4), (4, 8), (5, 9) \}$$

$$g = \{ (2, 4), (3, 9), (4, 8) \} = g^{-1} = \{ (4, 2), (9, 3), (8, 4) \}$$

$$h = \{ (2, 4), (3, 9), (4, 8) \}$$

$$f \circ g^{-1} = \{ (4, 2), (3, 9), (5, 8) \}$$

$$D \cap D = \{ 1, 3, 5 \}$$

$$f \circ g^{-1}$$

$$h = \{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \}$$

$$f \circ g^{-1} = \{ (1, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{4}), (5, \frac{1}{6}) \}$$



۶- تابع $y = \frac{3x+1}{x-2}$ را در نظر بگیرید. معکوس پذیری تابع را

به کمک شکل بررسی کنید پس ضابطه‌ی تابع معکوس را بدست

آورده و نمودار معکوس این تابع را رسم کنید

$$y = \frac{3x+1}{x-2}$$

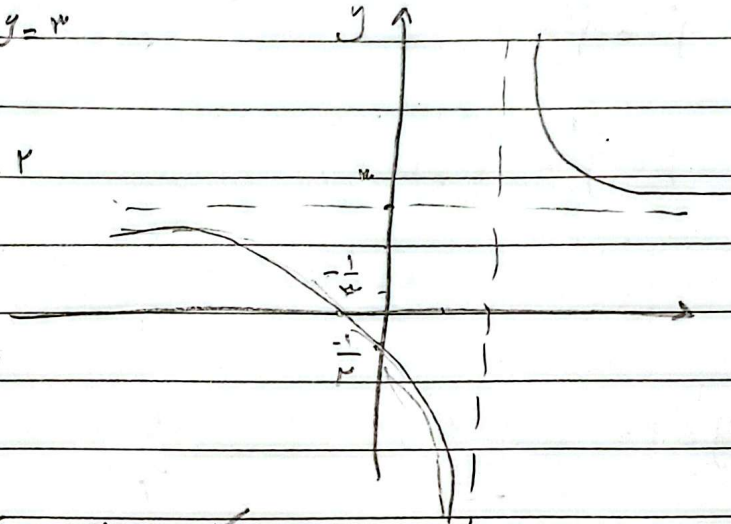
$$y = 3$$

y

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \text{ عمود}$$

$$x=0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$y=0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

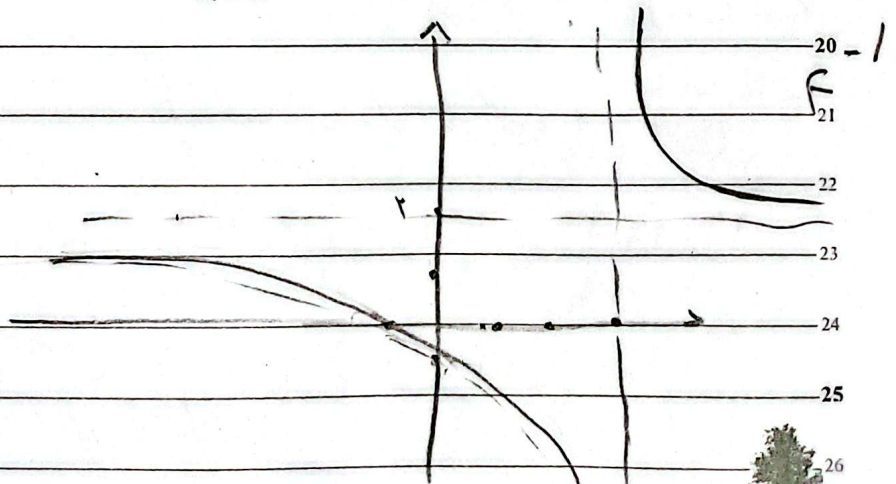


عرض افقی نمودار تابع را در یک نقطه قطع کند پس یک به یک است و معکوس دارد

$$y(x-2) = 3x+1 \Rightarrow xy - 2y = 3x+1$$

$$xy - 3x = 1+2y \Rightarrow x(y-3) = 1+2y \rightarrow$$

$$x = \frac{1+2y}{y-3} \rightarrow y = \frac{1+2x}{x-3} = f^{-1}(x)$$



۱- تابع $f(x) = |x-1| - |x-3|$ در بازه $[a, b]$ وارون پذیر

است اگر طول این بازه حداکثر مقدار ممکن باشد. ضابطه تابع معکوس در این بازه

پیدا کنید

$f(x) = |x-1| - |x-3|$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $x=1$ $x=3$

		1		3	
$x-1$	-	0	+	+	
$x-3$	-	-	0	+	

$f(x) = 2x - 4, x \in [1, 3]$

$y = 2x - 4 \rightarrow 2x = y + 4 \Rightarrow x = \frac{y}{2} + 2 \rightarrow y = \frac{x}{2} + 2 = f(x)$

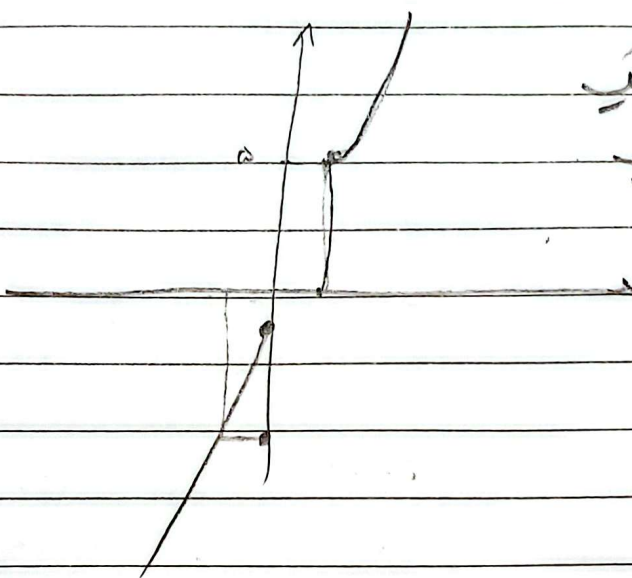
$f(x) = \frac{x}{2} + 2, x \in [-2, 2]$

۸- وارون پذیری تابع $f(u) = \begin{cases} u^2 + 4 & u \geq 0 \\ 4u - 1 & u < 0 \end{cases}$ را بررسی کنید

در صورت امکان ضابطه ی وارون تابع را بدست آورید

$$f(u) = \begin{cases} u^2 + 4 & u \geq 0 \\ 4u - 1 & u < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} u^2 + 4 & u \geq 0 \\ 4u - 1 & u < 0 \end{cases}$$



۱- خط افقی ضابطه ۴ دارد
۲- نقطه تقاطع آن در (۰، ۴) است
۳- است و منگوش دارد

۱- ضابطه (۱) $y = u^2 + 4 \rightarrow u^2 = y - 4 \rightarrow u = \pm \sqrt{y - 4}$

۲- $u = \sqrt{y - 4} \rightarrow y = \sqrt{u - 4} = f(u) = u \geq 0$ برعکس

۳- ضابطه (۲) $y = 4u - 1 \Rightarrow 4u = y + 1 \Rightarrow u = \frac{y + 1}{4}$

۴- $y = \frac{u + 1}{4} = f(u) = 0 \quad u \leq -1$ برعکس

۵- $f(u) = \begin{cases} \sqrt{u - 4} & u \geq 0 \\ \frac{u + 1}{4} & u \leq -1 \end{cases}$



مربع

$$F(u) = u^r - \frac{(u+1)^r}{u+r}$$

9. ضابطه دار در اینجا

$$f^{-1}(b) \text{ را بدست آوریم} \quad f^{-1}(u) = \frac{au+b}{ru+d}$$

$$F(u) = u^r - \frac{(u+1)^r}{u+r} = \frac{u^r(u+r) - (u^r + r u^{r-1} + \dots + 1)}{u+r}$$

$$F(u) = \frac{-ru-1}{u+r}$$

$$y = \frac{-ru-1}{u+r} \rightarrow y(u+r) = -ru-1$$

$$uy + ry = -ru-1 \Rightarrow uy + ru = -1 - ry$$

$$u(y+r) = -1 - ry \rightarrow u = \frac{-1-ry}{y+r}$$

$$y = \frac{-1-ry}{u+r} = f(u) = \frac{au+b}{ru+d} = \frac{-r-ry}{ru+y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -r \\ b = -1 \\ d = y \end{cases} \quad f^{-1}(-r) = \frac{-1-r(-r)}{-r+r} = \infty$$

بنا



۱. ضابطہ کی معکوس تابع کا ضابطہ

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

لاگرتھم

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

مثلاً $x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{2}{5}$

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \Delta = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4} \rightarrow x = 2 \text{ or } x = \frac{1}{2}$$

یعنی ہم برای $x = \frac{1}{2}$ و ہم برای $x = 2$ جواب ی می شود

$\frac{2}{5}$ سین تابع یک یک سینت پس معکوس ندارد

