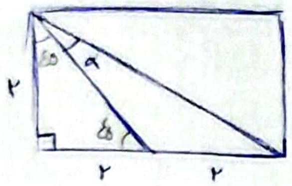
مسئله مدرک ،   شماره تکلیف ، 27 ،   (۲۵)   پایه دهم B

مثلث ABC با اضلاع $\sqrt{3}$ ، ۶ ، و زاویه بین آن‌ها (α) تشکیل شده است. اگر مساحت این مثلث ۴/۵ باشد، نسبت بیشترین مقدار α به کمترین مقدار α چند برابر است؟   1

$$S = \tfrac{1}{2}ab\sin\alpha \Rightarrow \tfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 6\times\sin\alpha = 4.5$$

$$\sin\alpha = \frac{4.5}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \alpha = \begin{matrix}60^\circ\\120^\circ\end{matrix} \Rightarrow \frac{120}{60} = \boxed{2\text{ برابر}}$$ (۵)



در شکل مقابل مقدار $\cot\alpha$ را بیابید؟   2

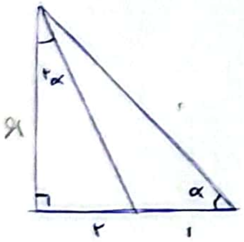
$$\cot(\alpha+45) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cot(\alpha+45) = \frac{1-\tan\alpha\tan 45^\circ}{\tan\alpha+\tan 45} = \frac{1-\tan\alpha}{\tan\alpha+1}$$ (۵)

$$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2-2\tan\alpha = 1+\tan\alpha$$

$$3\tan\alpha = 1 \Rightarrow \tan\alpha = \tfrac{1}{3}$$

$$\boxed{\cot\alpha = 3}$$



در شکل مقابل مقدار $\cot\alpha$ را بیابید؟   3

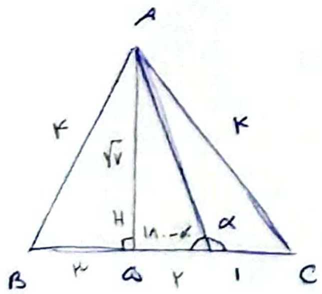
$$\tan\alpha = \frac{x}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2}{x} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\frac{2x}{3}}{\frac{9-x^2}{9}} \Rightarrow \frac{6x}{9-x^2} = \frac{2}{x}$$

$$6x^2 = 18-2x^2 \Rightarrow 8x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \pm\tfrac{3}{2}$$ (۵)

منفی قابل قبول نیست!

$$\tan\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cot\alpha = 2}$$



در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین است، مقدار $\tan\alpha$ را بیابید؟   4

AH ← ارتفاع و میانه

$$\overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow AH^2+9 = 16$$

$$AH = \sqrt{7}$$

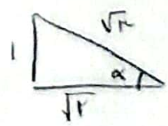
$$\overset{\Delta}{AEH} \Rightarrow \tan(180-\alpha) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$ (۵)

$$\tan(180-\alpha) = -\tan\alpha \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{-\sqrt{7}}{2}}$$

اگر $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ را بیابید؟   5

$$\sin^2 x + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} = \frac{4}{3}$$

$$\sin^2 x = \frac{4}{3}-1 = \frac{1}{3} \rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$ (۵)

با توجه به شکل ⇒ $\tan x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\tan^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\tan^2 x = (\tan x)^2 = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \qquad \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

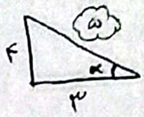
ساده شده عبارت $\frac{\sin^4\alpha+4\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}-\frac{\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$ را بیابید؟

$$\frac{\sin^4\alpha+4(1-\sin^2\alpha)}{1+(1-\sin^2\alpha)}-\frac{\cos^4\alpha+4(1-\cos^2\alpha)}{1+(1-\cos^2\alpha)}\Rightarrow\frac{\sin^4\alpha+4-4\sin^2\alpha}{2-\sin^2\alpha}-\frac{\cos^4\alpha+4-4\cos^2\alpha}{2-\cos^2\alpha}$$ 6

$$\frac{(2-\sin^2\alpha)^2}{2-\sin^2\alpha}-\frac{(2-\cos^2\alpha)^2}{2-\cos^2\alpha}=2-\sin^2\alpha-(2-\cos^2\alpha)=2-\sin^2\alpha-2+\cos^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\boxed{\cos2\alpha}$$

اگر $\tan\alpha=\frac{4}{3}$، انتهای کمان α در ربع سوم باشد. حاصل عبارت مقابل را بیابید؟

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)-\tan\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$$



ربع سوم ← sin cos منفی

$$(\cos\alpha)\times(-\sin\alpha)+\cot\alpha$$ 7

$$-\frac{3}{5}\times-\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{4}\Rightarrow-\frac{12}{25}+\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{-48+75}{100}=\frac{27}{100}$$

حاصل عبارت $(3\cos4x+\sqrt2\sin x-\sqrt2\cos x)$ به ازای $x=\frac{\pi}{12}$ را بدست آورید؟

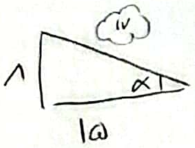
$$3\cos4x+\sqrt2(\sin x-\cos x)$$

$$3\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt2\left(\sqrt2\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)\right)\Rightarrow\frac{3}{2}+\sqrt2\left(\sqrt2\times\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$ 8

$$\frac{3}{2}+\sqrt2\left(\sqrt2\times-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{3}{2}-1\Rightarrow\frac{1}{2}$$

اگر $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{4}$ باشد. حاصل $\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ را بیابید؟

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\times\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}}\Rightarrow\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$$



$$=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{289}=17$$ 9

$$\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}}=\frac{\frac{136-120}{255}}{\frac{136-255}{289}}=\frac{\frac{16}{255}}{\frac{-119}{289}}=\boxed{-\frac{16}{105}}$$

اگر $2\sin\alpha<\sin2\alpha$ ، $0<\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}$ باشد انتهای کمان α در کدام ربع قرار دارد؟

$$\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sin\alpha}>0\Rightarrow\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}>0\rightarrow\cos\alpha>0$$

$\cos\alpha+$

$\sin\alpha-$ 10

$$2\sin\alpha<2\sin\alpha\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha<0$$

$\oplus$

$0<\sin<1$

ناحیه چهارم