سوال ۱) الف) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x-1}}$ $=\frac{(x-1)^2-x^2}{x(x-1)}=\frac{x^2-2x+1-x^2}{x(x-1)}=\frac{-2x+1}{x(x-1)}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
	$+$	ϕ	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

$D_f=(-\infty,0)\cup[\frac{1}{2},1)$

ب) $\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}}{\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}}\neq 0 \quad \frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}\neq 0 \quad \frac{-x+5+2x^2}{(x-1)(x+2)}\neq 0$

$-x+5+2x^2\neq 0 \Rightarrow x\neq -\frac{5}{2}$

سوال ۲

الف) $\sqrt{(\frac{1}{3})^x-9)(2^{x+2}-x^2)}\geq 0$ $\quad (\frac{1}{3})^x=9\rightarrow x=-2$

$2^{x+2}=x^2 \Rightarrow 2^{x+2}-x^2=0 \rightarrow x=-2$

$x=2,4$

x	$-\infty$		-2		$0,2$		$+\infty$
	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	ϕ	$+$

$D_f=(-\infty,-2]\cup[0,2,4]\cup(6,+\infty)$

ب) $\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}=2$ $\quad x-1\geq 0\rightarrow x\geq 1$

$\sqrt{y+1}=2-\sqrt{x-1}$

$2-\sqrt{x-1}\geq 0 \rightarrow \sqrt{x-1}\leq 2 \rightarrow x-1\leq 4 \rightarrow x\leq 5$

$\log_{\frac{1}{4}}^{x^2-x-2}$ / $\sqrt{x^2-1}+1$

(I) $x^2-x-2>0\rightarrow (x-2)(x+1)>0$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$		

$\rightarrow (-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

(II) $x^2-1\geq 0 \rightarrow$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
	$+$	0	$-$	0	$+$		

$D_f=(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$

(III) $\sqrt{x^2-1}+1\neq 0 \rightarrow \sqrt{x^2-1}\neq -1$ برقرار است

$I\cap II\cap III \Rightarrow (-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

سوال ۴

$\sqrt{۳+ax-x^۲} \geq ۰ \Rightarrow -x^۲+ax+۳ \geq ۰ \rightarrow x^۲-ax-۳ \leq ۰ \rightarrow x=\frac{a \pm \sqrt{a^۲+۱۲}}{۲}$

$D_f = [\frac{a-\sqrt{a^۲+۱۲}}{۲} \, , \, \frac{a+\sqrt{a^۲+۱۲}}{۲}]$ $\quad a-\sqrt{a^۲+۱۲}=-۲$

$a-\sqrt{a^۲+۱۲}=-۴$

$a \geq -۴ \leftarrow a+۴ \geq ۰$

$\sqrt{a^۲+۱۲} \geq ۰$

$\frac{-\frac{۱}{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۴}+۳}}{۲} = b = \frac{a+\sqrt{a^۲+۱۲}}{۲} \leftarrow a=-\frac{۱}{۲} \leftarrow (a+۴)^۲ = a^۲+۱۲$

$a+b = -\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲} = ۱$

سوال ۵

$f(x) \begin{cases} ۳x-۲ & x \geq ۱ \\ ۲x+۳ & x<۱ \end{cases}$ $\qquad g(x) = \sqrt{f(x)-x}$

$f(-۳)=۰ \rightarrow g(x)=\sqrt{۳}$

$f(-۲)=-۱ \rightarrow g(x)=\sqrt{-۱}$ ✗

$f(۱)=۱ \rightarrow g(x)=۰$

$f(۰)=۳ \rightarrow g(x)=\sqrt{۳}$

$f(-۱)=۱ \rightarrow g(x)=\sqrt{۲}$

$D_g = [-۳, +\infty)$

سوال ۶

$\begin{cases} (a+۱)(x+۲) & x>۱ \\ ۳a+۲x & x \leq ۱ \end{cases}$

$۲f(۵) = f(-۲)$ $\quad a=۶$

$f(۵)=(a+۱)(۷) \rightarrow ۷a+۷ \rightarrow$

$۲f(۵) = ۱۴a+۱۴$

$f(-۲) = ۳a-۶ \rightarrow ۱۴a+۱۴ = ۳a-۶$

$a = \frac{-۲۰}{۱۱}$

سوال (۸)

$$\begin{cases} 2f(x) - 3f(-x) = 4x^2 - x \\ 2f(-x) - 3f(x) = 4x^2 + x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4f(x) - 6f(-x) = \\ 8x^2 - 2x \\ 6f(-x) - 9f(x) = \\ 12x^2 + 3x \end{cases}$$

$$-5f(x) = 20x^2 + x \rightarrow 5f(x) = -20x^2 - x \rightarrow f(x) = -4x^2 - \frac{x}{5}$$

سوال (۹)

$$(a+2)f(x) - 3xf(x+2) = 4x^3 - mx + 3m - 1 \quad f(0) = ?$$

$$x = 0 \rightarrow (a+2)f(0) - 3 \times 0 \times f(2) = 4(0) - m(0) + 3m - 1$$

$$f(0) = \frac{3m-1}{2}$$

$$x = -2 \rightarrow (0)f(-2) - 3(-2)f(0) = 16 + 6m + 3m - 1 \rightarrow f(0)$$

$$\frac{9m+15}{6}$$

$$\frac{\frac{10+5x}{3}}{2} = \frac{3x-1}{2} \rightarrow x = \frac{17}{4} = \frac{9}{4} \rightarrow f(0) = \frac{25}{4}$$

سوال (۱۰)

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3x^2 - 12x + 4}{x} \quad f(-1) = ?$$

$$f(x) = ax + b \rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x} + b$$

$$\frac{a}{x} + b + ax + b = \frac{a + ax^2 + 2bx}{x}$$

$$\frac{ax^2 + 2bx + a}{x} = \frac{3x^2 - 12x + 4}{x} \Rightarrow a = 3$$

$$b = -6 \rightarrow f(-1) = -a + b$$

$$-9 = -6 - 3$$