۱۹٫۵

نام و نام خانوادگی ...... [illegible] ...... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ۹ ...... کلاس یازدهم تجربی ......

۱

$f(x) = \begin{cases} \cot\frac{\pi x}{4} & ; x \leq 1 \\ \sqrt{x^2+1} & ; x > 1 \end{cases}$ $\quad f \circ f(\frac{2}{3}) = ?$

$f(f(\frac{2}{3}))$

if $x=\frac{2}{3} \xrightarrow{f(x)} \cot\frac{\pi x}{4} \to \cot\frac{\pi \cdot \frac{2}{3}}{4} \to \cot(\frac{\pi}{6}) = \circ \Rightarrow \sqrt{3}$

$f(\sqrt{3}) = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} = \sqrt{4} = 2$

(۲)

۲

الف) اگر $f(\frac{1}{x}) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$ و $g(x) = 2\cos^2 x$ مقدار $f \circ g(\frac{\pi}{3})$ را بدست آورید:

$f(\frac{1}{x}) = f(x) \xrightarrow{\text{if } \frac{1}{x}} f(x) = \sqrt{\frac{\frac{2}{x}-1}{\frac{1}{x^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{2-x}{x}}{\frac{1}{x^2}}} \to \sqrt{x(2-x)} \to f(g(x)) \to \sqrt{2\cos^2(\frac{\pi}{3})(2-2\cos^2(\frac{\pi}{3}))}$ $\quad (\frac{1}{4},\ 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2})$

$f(g(x)) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) اگر $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، $f(x) = [x]$ مقدار $f \circ g(\sqrt{2})$ را بدست آورید:

$f(g(x)) = [\frac{x}{1-x}]$

if $x=\sqrt{2}$: $[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}] = [\frac{\simeq 1.4}{\cancel{1-1.4}_{=-0.4}}] \simeq [-\frac{7}{2}] = -4$

(۲)

۳

$g \circ f(\frac{\pi}{4})$ $\quad g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ $\quad f(x) = \sin x$

$g(f(x))$ $\quad \sin x \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 x}}_{\cos^2 x} \to g(f(x)) = \sin x\,|\cos x| \xrightarrow[\frac{\pi}{4}]{} \sin x \cos x$ $\quad (\cos, \sin > 0)$

$\sin x \cos x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} \sin(\frac{\pi}{4}) \times \cos(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{1}{2}$

(۲)

۴

$g(x) = \{(4,6),(2,4),(6,8),(8,10)\}$ $\quad f(x) = \{(4,5),(6,5),(8,12),(10,12)\}$

الف) $f \circ g(x) \Rightarrow f(g(x)) = \{(4,5),(2,5),(6,12),(8,12)\}$

ب) $g \circ f(x) \Rightarrow g(f(x)) = \varnothing$

ج) $f \circ f(x) \to f(f(x)) = \varnothing$

د) $g \circ g(x) \to g(g(x)) = \{(4,8),(2,6),(6,10)\}$

(۲)

۵

$f = \{(2,1),(3,2),(4,5),(1,7)\}$ $\quad g = \{(1,2),(3,1),(a,3),(b,1)\}$

$(4,2) \in f \circ g$ $\quad (4,1) \in g \circ f$ $\quad (a,b) = ?$

$f \circ g = f(g(x))$

$g(4) = ?$

if $a=4 \to g(4)=3 \to f(3)=2 \to f \circ g = (4,2) \to a=4$

if $b=4 \to g(4)=1 \to f(1)=7$ ✗

$(4,1) \in g \circ f \to g(f(x))$

$g(f(4)) \to g(5) = 1$

$b=5$

$\boxed{(a,b) = (4,5)}$

$f(4) = 5$

(۲)

$f(f(x)) = 4x+3$

if $f(x)=ax+b$

$f(f(x)) = a(ax+b)+b = 4x+3$

$a^2x+ab+b = 4x+3$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$2b+b=3$

$3b=3 \Rightarrow b=1 \Rightarrow f(x)=2x+1$

$g(2x+3) = 3x-2$

$g(x)=cx+d \rightarrow c(2x+3)+d = 3x-2$

$2cx+3c+d = 3x-2$

$2c = 3 \Rightarrow c=\frac{3}{2} \qquad 3\times\frac{3}{2}+d=-2$

$d=-2-\frac{9}{2} = -\frac{13}{2}$

$g(x) = \frac{3}{2}x-\frac{13}{2}$

$g\circ f(-1) \rightarrow g(f(-1)) \Rightarrow \frac{3}{2}(2x+1)-\frac{13}{2} = \frac{6x+3-13}{2}$

$g\circ f(x) = \frac{6x-10}{2} \xrightarrow{x=-1} \frac{-16}{2} = -8$

(۲) ۶

$f(x)=\sqrt{x+|x|} \qquad g(x)=\frac{1}{x^2-4x} \qquad D_{g\circ f}=?$

$g\circ f \rightarrow g(f(x))$

$x\in D_f \rightarrow \sqrt{x+|x|} \geq 0 \rightarrow [0,+\infty) \quad f(x)\in D_g$

$f(x)\in D_g \qquad \sqrt{x+|x|}\neq 0 \rightarrow$ برای $x\leq 0$ ، $x+|x|=0 \Rightarrow x>0$

$\mapsto D_g \rightarrow x^2-4x\neq 0 \qquad x+|x|\neq 0 \rightarrow x\in(0,+\infty)$

$x(x-4) \qquad x+|x|\neq 16$

$x\neq 0,4 \qquad x\neq 8$

$\boxed{D_{g\circ f} = (0,+\infty)-\{8\}}$

(۲) ۷

$f(x)=\sqrt{1-x^2} \qquad g(x)=\sqrt{x} \qquad D(f+g)\circ f$

$(f+g)\circ f \rightarrow f\circ f(x)+g\circ f(x) =$

$f\circ f(x) \rightarrow x\in D_f \qquad D_f \rightarrow 1-x^2\geq 0 \qquad x^2\leq 1 \rightarrow -1\leq x\leq 1$

$f(x)\in D_f \qquad f(x)\in D_f \; -1\leq\sqrt{1-x^2}\leq 1 \rightarrow 0\leq 1-x^2\leq 1 \; -1\leq -x^2\leq 0 \; 1\geq x^2\geq 0$

$-1\leq x\leq 1$

$g\circ f(x) \quad x\in D_f \rightarrow -1\leq x\leq 1$

$f(x)\in D_g \quad \sqrt{1-x^2}\geq 0 \quad 1-x^2\geq 0 \quad x^2\leq 1 \rightarrow -1\leq x\leq 1$

$D_g \rightarrow x\geq 0 \qquad D(f+g)\circ f \rightarrow [-1,1]$

(۲) ۸

الف) $f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = 4x+5 \qquad \frac{3x+1}{x-2}=t \Rightarrow 3x+1=tx-2t \Rightarrow 3x-tx=-2t-1 \qquad x=\frac{-2t-1}{3-t}$ $\quad \frac{2t+1}{t-3}$

$x(3-t)=-2t-1 \Rightarrow$

$f(t) = 4\left(\frac{-2t-1}{3-t}\right)+5 = \frac{-8t-4}{3-t}+5 = \frac{-8t-4+15-5t}{3-t} = \frac{-13t+11}{3-t} \Rightarrow f(x)=\frac{-13x+11}{3-x}$ $\quad \frac{13x-11}{x-3}$

شرط تعریف $x\neq 3$

ب) $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^3+\frac{1}{x^3}$

$x+\frac{1}{x}=t \rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3} \Rightarrow x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x-\frac{3}{x}$

$x^3+\frac{1}{x^3} = \underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3}_{t}-3\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{t} \Rightarrow f(t)=t^3-3t \Rightarrow f(x)=x^3-3x$

(۱,۵) ۹

$f(x)=x\sqrt{x} \qquad g\circ f(x) \rightarrow$ انتقال طول نقاط، در نمودار این تابع محور xها را قطع می‌کند

$g\circ f(x)=g(f(x)) \rightarrow$ هرجا که $g(x)$ به جای x عدد ۱ یا $2\sqrt{2}$ قرار بدیم، خروجی صفر است

if $g(f(x))$, $f(x)=1 \Rightarrow g(f(x))=0 \rightarrow$ if $f(x)=1 \Rightarrow$ $f(x)=x\sqrt{x}$ $\quad x\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$

if $g(f(x))$, $f(x)=2\sqrt{2} \Rightarrow g(f(x))=0 \rightarrow$ if $f(x)=2\sqrt{2} \xrightarrow{f(x)=x\sqrt{x}} x\sqrt{x}=2\sqrt{2} \Rightarrow x=2$

$2-1 = 1$

(۲) ۱۰