محمد مصطفی پور
تکلیف شماره ۵

$19{,}75$

۱)

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \cot\frac{\pi}{6} = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} > 1 \Rightarrow \sqrt{\underbrace{3+1}_{4}} = 2$

2

۲) الف)

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} \qquad g(x) = 2\cos^2 x \qquad f\circ g\left(\frac{\pi}{3}\right)?$

$f(x) = \frac{\frac{2}{x}-1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{(2-x)x^2}{x} \Rightarrow f(x) = (2-x)x \to 2x - x^2$

$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{3} = \underbrace{\ }_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

$1{,}75$

$F\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

ب)

$f\circ g(x) = \left[\frac{x}{1-x}\right] \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{-1}\right]$

$\sqrt{2}+2 \to \simeq 3/4$

$\left[\frac{3/4}{-1}\right] = -4$

۳)

$f(x) = \sin x \qquad g(x) = x\sqrt{1-x^2} \qquad g\circ f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$g\circ f(x) = \sin x\sqrt{1-\sin^2 x} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

2

۴)

$f(x) = \{(4,5),(6,5),(8,12),(10,12)\} \qquad g(x) = \{(4,6),(2,4),(6,8),(8,10)\}$

2

الف) $f\circ g(x)$

$4 \to 6 \to 5$

$2 \to 4 \to 5$

$6 \to 8 \to 12$

$8 \to 10 \to 12$

$\Rightarrow f\circ g(x) = \{(4,5),(2,5),(6,12),(8,12)\}$

ب) $g\circ f(x)$

$4 \to 5 \times$

$6 \to 5 \times$

$8 \to 12 \times$

$10 \to 12 \times$

$\Rightarrow g\circ f(x) = \{\ \}$ یا $\varnothing$

ج) $f\circ f(x)$

$4 \to 5 \to \times$

$6 \to 5 \to \times$

$8 \to 12 \to \times$

$10 \to 10 \to \times$

$\Rightarrow f\circ f(x) = \{\ \}$ یا $\varnothing$

د) $g\circ g(x) =$

$4 \to 6 \to 8$

$2 \to 4 \to 6$

$6 \to 8 \to 10$

$8 \to 10 \times$

$\Rightarrow g\circ g(x) = \{(4,8),(2,6),(6,10)\}$

۵)

$(4,2) \in f \circ g(x)$

$g: (4,?) \to (?,2) \Rightarrow ? = 3 \Rightarrow a = 4$

$(4,5)$

$(4,1) \in g \circ f(x)$

$(4,?) \to (?,1) \Rightarrow ? = b = 5$

---

۶)

$g(2x+3) = 3x - 2$

$g(x) = \frac{3}{2}x - 6/5$

$g(-1) = -\frac{3}{2} - 6/5 = -8$

$f(x) = ax+b$

$f \circ f(x) = a^2x + ab + b = 4x + 3 \Rightarrow a = \pm 2$

$(a+1)b = 3$

$3 \times 1 \Rightarrow b = 1 , a = 2$

$-1 \times -3 \Rightarrow a = -2 , b = -3$

$-1(a) + b = \to -2+1 = -1$

$\to 2 - 3 = -1$

در هر صورت $f(-1) = -1$

---

۷)

دامنه $g \circ f(x)$ ؟

$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ و $f(x) = \sqrt{x + |x|}$

$D_{g \circ f} = D_f \cap$ دامنه $g(x) \Rightarrow$

$R - \{0, 4\}$

برد $f(x) \to$ $x > 0 \to \sqrt{2x} \to$ می‌تواند هر عدد $+$ای باشد $\Downarrow \in R^+$

$x = 0 \to 0$

$x < 0 \to 0$

$\Rightarrow D_{g \circ f(x)} = R^+ - \{8, 0\} = R^+ - \{8\}$

$\sqrt{2x} \neq 4 \Rightarrow x \neq 8$

---

۸)

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$D_f = -1 \geq x \geq 1$

$g(x) = \sqrt{x}$

دامنه $(f+g) \circ f$

$R_f = [0, 1]$ $\longrightarrow$ اگر وارد f و g شود مشکلی ندارند $\Rightarrow D(f+g) \circ f = [-1, 1]$

$(f+g)x = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x^2}$

---

۹)

الف) $f\left(\frac{3x+1}{x-2}\right) = 4x + 5$

$\frac{3x+1}{x-2} = t$

$3x + 1 = tx - 2t$

$\Leftarrow (3-t)x = -2t - 1$

$x = \frac{2t+1}{t-3}$

$\frac{8t+4}{t-3} + 5$

$f(x) = \frac{13x - 11}{x - 3}$

ب) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)(1)$

$f(x) = x^3 - 3x$

---

۱۰)

$x\sqrt{x} = 1$ $x = 1$

$x\sqrt{x} = 2\sqrt{2}$ $x = 2$

$2 - 1 = 1$

در اصل x های ورودی به تابع $g(x)$ نقاط برخورد نمودار با محور x را مشخص می‌کنند که ما داریم

اگر x های ورودی به $g(x)$ ، 1 و $2\sqrt{2}$ باشد به نقاط مد نظر می‌رسیم که x های ورودی به g همان خروجی $f(x)$ است