

۲۰

SUBJECT

Year: Month: Day:

گروه B

مبانی ترغیب

تاریخ: ۷/۱۲

Page: ()

۱- رتباع اولی u ؛ $\cot \frac{\pi u}{r}$ و $f(u) = \begin{cases} \cot \frac{\pi u}{r} & u \leq 1 \\ \sqrt{\frac{u^2+1}{r+1}} & u > 1 \end{cases}$ مقدار $f \circ f(\frac{r}{3})$ را بیابید.

$$f \circ f = \begin{cases} \cot \frac{\pi u}{r} & u \leq 1 \\ \sqrt{\frac{u^2+1}{r+1}} & u > 1 \end{cases}$$

از شرط $r=3$ داریم:

$$f \circ f(\frac{r}{3}) = f(f(\frac{r}{3})) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{\frac{(\sqrt{3})^2+1}{3+1}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

که از شرط اول $\frac{r}{3} < 1$ است.

$$\cot(\frac{\pi}{3} \times \frac{r}{3}) = \cot(\frac{\pi}{9}) = \cot 3.0 = \sqrt{3}$$

۱- با توجه به توابع زیر مقدار $f \circ g(\frac{r}{3})$ را بیابید.

ف ۱ اگر $f(\frac{1}{u}) = \sqrt{\frac{ru-1}{u^2}}$ و $g(u) = r \cos^2 u$ مقدار $f \circ g(\frac{r}{3})$ را بیابید.

$$f(\frac{1}{u}) = \sqrt{\frac{ru-1}{u^2}} = \sqrt{\frac{ru}{u^2} - \frac{1}{u^2}} = \sqrt{\frac{r}{u} - \frac{1}{u^2}} = \sqrt{r(\frac{1}{u}) - (\frac{1}{u})^2}$$

$$\frac{1}{u} = t \rightarrow f(t) = \sqrt{rt - t^2}$$

$$f \circ g(\frac{r}{3}) = f(g(\frac{r}{3})) = f(\frac{1}{3}) = \sqrt{r(\frac{1}{3}) - (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{r}{3}}$$

$$r \cos^2 \frac{\pi}{3} = r \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{r}{4}$$



Senobar

ب) اگر $f(u) = [u]$ و $g(u) = \frac{u}{1-u}$ متناظر $f \circ g(\sqrt{r})$

$$f \circ g(\sqrt{r}) = f(g(\sqrt{r})) =$$

$$g(u) = \frac{u}{1-u} \rightarrow g(\sqrt{r}) = \frac{\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} \times \frac{1+\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{r}+r}{1-r} = -r - \sqrt{r}$$

$$f(-r - \sqrt{r}) = \left[\frac{-r - 1/2}{-r - r} \right] = -r$$

۳- اگر $f(u) = \sin u$ و $g(u) = u\sqrt{1-u^2}$ متناظر $g \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$g \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\sin \frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$= \frac{\sqrt{r}}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r}}{r} \times \sqrt{1 - \frac{1}{r}} = \frac{\sqrt{r}}{r} \times \frac{\sqrt{r-1}}{\sqrt{r}} = \frac{1}{r}$$

۴- اگر $f(u) = \{(5,5), (6,5), (8,12), (10,12)\}$ و $g(u) = \{(5,4), (2,5), (6,8), (1,10)\}$

حاصل متناظر

$$f \circ g(u) = f(g(u)) =$$

$$\{ (5,4) \rightarrow (2,5), (2,5) \rightarrow (6,8), (6,8) \rightarrow (1,10), (1,10) \rightarrow (5,5) \}$$

$$2 \rightarrow 5 \rightarrow 8$$

$$4 \rightarrow 8 \rightarrow 12$$

$$8 \rightarrow 10 \rightarrow 12$$

1 $g \circ f(u) = g(f(u))$. تعریف نمی شود

2 $f(u)$
3 $f \rightarrow 5$

$g \circ f(u) = 10$

4 $4 \rightarrow 8$

5 $8 \rightarrow 12$

6 $10 \rightarrow 12$

7
8 $f \circ f(u) = f(f(u))$

9 $f \rightarrow 5$

10 $4 \rightarrow 5$

تعریف نمی شود = 1

11 $8 \rightarrow 12$

12 $10 \rightarrow 12$

13
14 $g \circ f(u) = g(f(u))$

15 $f \rightarrow 4 \rightarrow 8$

$\{(4, 8), (2, 4), (4, 10)\}$

16 $2 \rightarrow 4 \rightarrow 4$

17 $4 \rightarrow 8 \rightarrow 10$

18 $8 \rightarrow 10$

19

20

21

22

23

24

25

26

$$g = \{ (1,2), (2,1), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (7,2), (8,2), (9,2), (10,2) \} \quad f = \{ (1,2), (2,1), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (7,2), (8,2), (9,2), (10,2) \}$$

نمونه کار: $(4,2) \in f \circ g$ و $(5,1) \in g \circ f$ باشند. (a,b)

$$(4,2) \in f \circ g \rightarrow \text{یعنی } 4 \text{ در دامنه } g \text{ و } 2 \text{ در بردار } f \text{ است}$$

با توجه به f عدد ۲ باید ۴ در دامنه f و ۱ در بردار f باشد. $a=4$ و $b=1$

$$f \circ g$$

$$(a,b) = (4,1) \quad \text{با توجه به } g \rightarrow b=1$$

$$f(f(n)) = 4n+3 \quad \text{اگر } f \text{ و } g \text{ توابع خطی باشند بگویید که}$$

$$g(2n+3) = 3n-2 \quad \text{و } g \circ f \text{ حاصل}$$

$$g(2n+3) = 3n-2$$

$$2n+3 = t \Rightarrow 2n = t-3 \Rightarrow n = \frac{t-3}{2}$$

$$g(t) = 3\left(\frac{t-3}{2}\right) - 2 = \frac{3t}{2} - \frac{9}{2} - 2 = \frac{3t}{2} - \frac{13}{2}$$

$$g(t) = \frac{3t}{2} - \frac{13}{2} = g(n) = \frac{3n}{2} - \frac{13}{2}$$

$$f(n) = an+b \rightarrow f(f(n)) = f(an+b) =$$

$$a(an+b) + b = a^2n + ab + b = 4n+3$$

$$a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \quad 2b + b = 3 \rightarrow b = 1$$

$$a = -2 \rightarrow a = -2 \quad f(n) = 2n+1 \quad (1)$$

$$-2b + b = 3 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow f(n) = -2n - 3$$

① $f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$

② $f(-1) = -2(-1) - 3 = -1$

مجموع $f(-1)$ و $f(-1)$ = -1

$g \circ f(-1) = g(f(-1)) = g(-1)$

$g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow g(-1) = \frac{(-1)^2}{2} - \frac{1}{2} = -1$

$g(u) = \frac{1}{u^2 - 5u}$ و $f(u) = \sqrt{u + |u|}$ ریشه ی تابع

$D_{g \circ f} = \{u \in D_f : f(u) \in D_g\}$

$\{u \in \mathbb{R} : f(u) \neq 0 \text{ و } f(u) \neq 5\}$

$D_f = u + |u| \geq 0 \rightarrow u \geq | -u | \quad D_f = \mathbb{R}$
 زیرا $|u| \geq 0$

$D_g = u^2 - 5u \neq 0 \quad u(u - 5) \neq 0 \quad u \neq 0 \text{ و } u \neq 5$

$= \{u \in \mathbb{R} \mid \sqrt{u + |u|} \neq 0 \text{ و } \sqrt{u + |u|} \neq 5\}$

$u + |u| \neq 0 \quad u + |u| \neq 25 \rightarrow u > 0 \text{ و } u + u = 25$

$u \neq -|u| \quad u + u \neq 25 \rightarrow u < 0 \text{ و } u - u = 25$

$-u \neq |u| \quad u \neq 1$

بنابراین $u > 0$ و $u < 1$

$D_{g \circ f} = (0, 1) \cup \{5\}$

1- اگر $F(u) = \sqrt{1-u^2}$ و $g(u) = \sqrt{u}$ از تابعی ترکیبی $(f+g) \circ f$

$$D_{(f+g) \circ f} = \left\{ u \in Df, F(u) \in D_{f \circ g} \right\}$$

$$D_f = \{ u \in \mathbb{R} \mid -1 \leq u \leq 1 \}$$

$$D_g = \{ u \geq 0 \}$$

$$D(f+g) = D_f \cap D_g = [0, 1]$$

$$D_{(f+g) \circ f} = \left\{ -1 \leq u \leq 1, 0 \leq f(u) \leq 1 \right\}$$

$$0 \leq \sqrt{1-u^2} \leq 1$$

$$0 \leq 1-u^2 \leq 1$$

$$-1 \leq u \leq 1$$

$$D_{(f+g) \circ f} = [-1, 1]$$

2- اگر $f(u) = \frac{u+1}{u-1}$ و $g(u) = \frac{u-1}{u+1}$ از تابعی ترکیبی

$$f \left(\frac{u+1}{u-1} \right) = \frac{u+1}{u-1} + \frac{u-1}{u+1}$$

$$f \left(\frac{u+1}{u-1} \right) = \frac{u+1}{u-1} + \frac{u-1}{u+1} \rightarrow \frac{u+1}{u-1} = t \rightarrow t = \frac{u+1}{u-1}$$

$$\frac{u+1}{u-1} = t \rightarrow u+1 = tu - t \rightarrow u - tu = -t - 1 \Rightarrow u = \frac{-t-1}{1-t}$$

$$f(t) = f \left(\frac{t+1}{t-1} \right) + \frac{t-1}{t+1} = \frac{t+1}{t-1} + \frac{t-1}{t+1} = \frac{t^2+1}{t^2-1}$$

$$= \frac{1+t^2}{t-1} \rightarrow f(u) = \frac{1+u^2}{u-1}$$

Senobar



$$b) f\left(u + \frac{1}{u}\right) = u^3 + \frac{1}{u^3} \quad u + \frac{1}{u} = t$$

$$(u + \frac{1}{u})^3 = u^3 + \frac{1}{u^3} + 3u + \frac{3}{u}$$

$$(u + \frac{1}{u})^3 = u^3 + \frac{1}{u^3} + 3(u + \frac{1}{u})$$

$$u^3 + \frac{1}{u^3} = (u + \frac{1}{u})^3 - 3(u + \frac{1}{u})$$

$$f(t) = t^3 - 3t = f(u) = u^3 - 3u$$

۱۰ - نمودار تابع g محور u ها را در نقاطی به طول $2\sqrt{2}$ قطع می کند

اگر $f(u) = u\sqrt{u}$ باشد اختلاف طول نقاطی که نمودار تابع $g \circ f(u)$

محور u ها را قطع می کند کرات ۱

و تکی جلوی تابع g عدد $2\sqrt{2}$ باشد مقدار تابع منفی می شود پس $f(u)$

یک بار از دو یک بار $2\sqrt{2}$ فاصله می گیریم

$$f(u) = u\sqrt{u} = 1 \Rightarrow \sqrt{u} = t \quad t^2 \times t = 1 \quad t^3 = 1$$

$$\sqrt{u} = 1 \quad \boxed{u=1} \quad t=1$$

$$f(u) = u\sqrt{u} = 2\sqrt{2}$$

$$u^3 = 8 \quad \boxed{u=2}$$

$$2-1=1$$

$$(1,0) \in g \quad f(u) = u\sqrt{u} \rightarrow Df \quad u > 0$$

$$(2\sqrt{2}, 0) \quad g \circ f(u) = 0 \rightarrow g(f(u)) = 0 \quad u\sqrt{u} = 1$$

$$f(u) = 1 \quad \boxed{u=1}$$

$$f(u) = 2\sqrt{2} \Rightarrow u\sqrt{u} = 2\sqrt{2}$$

$$2-1=1$$