هستی رمضانی/یازدهم دختر

①

$$\frac{۱}{x-۱}=|x-۱|$$

$\longrightarrow x\geqslant ۱$

$$x-۱=\frac{۱}{x-۱}$$

$$(x-۱)^{۲}=۱\longrightarrow x^{۲}+۱-۲x=۱$$

$$x^{۲}-۲x=۰$$

$$x(x-۲)=۰$$

$x=۰$ غ ق ق

$x=۲$ ق ق

$\longrightarrow x<۱$

$$۱-x=\frac{۱}{x-۱}$$

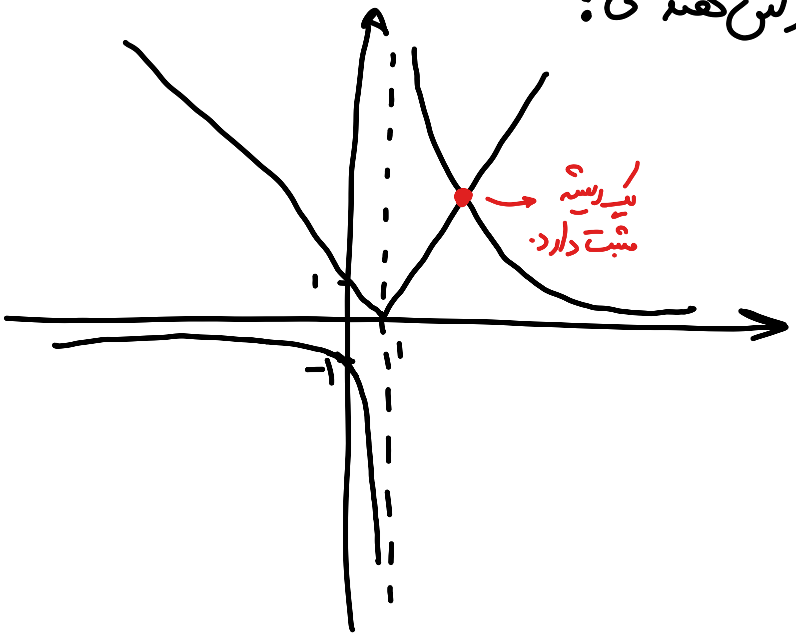
$$(۱-x)(x-۱)=۱$$

$$-x^{۲}+۲x-۱=۱\longrightarrow x^{۲}-۲x+۲=۰$$

$\Delta<۰\longrightarrow$ ✗ ریشه

$\Longrightarrow x=۲$ یک ریشه

روش هندسی:



②

الف) $\left|\frac{۲x-۱}{x}\right|<۲\longrightarrow -۲<\frac{۲x-۱}{x}<۲$

$$-۲<\frac{۲x-۱}{x}\longrightarrow -۲x<۲x-۱\longrightarrow ۴x>۱$$

$$\Longrightarrow x>\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{۲x-۱}{x}<۲\longrightarrow ۲x-۱<۲x\longrightarrow -۱<۰ \checkmark$$

$$\Longrightarrow x=\left(\frac{۱}{۴},+\infty\right)$$

ب) $\left|\frac{x-۲}{۲x+۱}\right|>۱$

$$\frac{x-۲}{۲x+۱}-۱>۰\longrightarrow\frac{x-۲-۲x-۱}{۲x+۱}>۰\longrightarrow\frac{-x-۳}{۲x+۱}>۰$$

$$\begin{array}{ccccc} & -۳ & & -\frac{۱}{۲} & \\ \hline - & ○ & + & ○ & - \\ & & & ن & \end{array}\longrightarrow x=\left(-۳,-\frac{۱}{۲}\right)_{I}$$

$$\frac{x-۲}{۲x+۱}<-۱\longrightarrow\frac{x-۲+۲x+۱}{۲x+۱}<۰\longrightarrow\frac{۳x-۱}{۲x+۱}<۰$$

$$\begin{array}{ccccc} & -\frac{۱}{۲} & & \frac{۱}{۳} & \\ \hline + & ○ & - & ○ & + \\ & ن & & & \end{array}\longrightarrow x=\left(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳}\right)\ II$$

$$I\cap II\longrightarrow x=\left(-۳,\frac{۱}{۳}\right)-\left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$$

(۳)

$x^۲ < |x+۶| \rightarrow x^۲ < x+۶ \rightarrow x^۲ - x - ۶ < ۰ \rightarrow (x-۳)(x+۲)=۰$ ↳ $x=-۲$, $x=۳$

$x+۶ < -x^۲ \rightarrow x^۲+x+۶<۰ \rightarrow \Delta<۰$ ✗ ق ق

$\Rightarrow x=(-۲,۳)$

$|x-\alpha| < \beta \rightarrow |x-\alpha|-\beta<۰ \xrightarrow{x=-۲} |x+۲|-\beta=۰$

↳ $x=۳$: $|x-۳|-\beta=۰$ $\Big\} \rightarrow |x+۲|=|x-۳|$

$\rightarrow x+۲=x-۳ \rightarrow ۲=-۳$ ✗

↳ $x+۲=۳-x \rightarrow ۲x=۱ \rightarrow \boxed{x=\frac{۱}{۲}}$

---

(۴)

$y=|x+۱|-|۲x|+|x-۲|$ ↓ -۱ ↓ ۰ ↓ ۲

$۳-۱=\boxed{۲}$

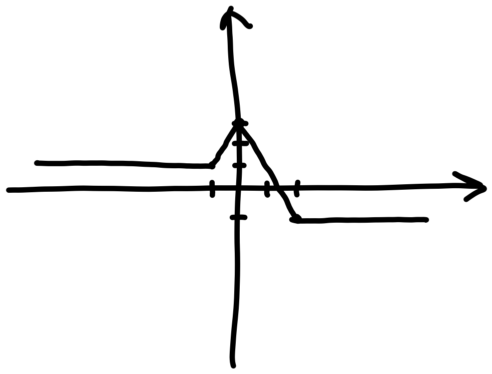
-۱ | ۰ | ۲

$y=-x-۱+۲x+۲-x$, $y=۱$

① $y=x+۱+۲x+۲-x$, $y=۲x+۳$

③ $y=x+۱-۲x+۲-x$, $y=-۲x+۳$

(−۱) $y=x+۱-۲x+x-۲$, $y=-۱$



---

(۵)

$y=|\frac{۱}{۲}x|-۲ \longrightarrow y'=|\frac{۱}{۲}x+۲|-۱$

$|\frac{۱}{۲}x|-۲=|\frac{۱}{۲}x+۲|-۱ \longrightarrow |\frac{۱}{۲}x|-|\frac{۱}{۲}x+۲|-۱=۰$ ↓ ۰ ↓ -۴

-۴ | ۰

$y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}x+۲-۱$, $y=۱$

① $y=-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}x-۲-۱$, $y=-x-۳$

(−۳) $y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}x-۲-۱$, $y=-۳$

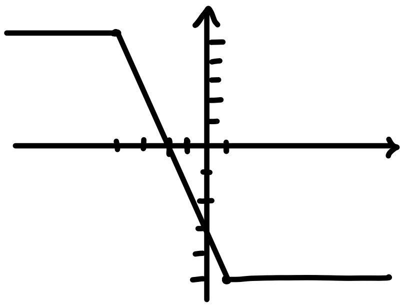
$\longrightarrow y=-x-۳ \rightarrow -x-۳=۰$

$\Longrightarrow \boxed{x=-۳}$

---

(۶)

الف) $f(x)=[|۱-x|-|x+۴|]$



$\rightarrow R_f=\{x \mid x\in[-۵,۵] \cap x\in\mathbb{Z}\}$

به عبارتی: $\{-۵,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$

ب) $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{x+1}{x}\right] \rightarrow \frac{1}{x} - \left[\frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right] \rightarrow \underbrace{\frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]}_{R=[0,1)} - 1$

$$\Rightarrow R_f = [-1,0)$$

---

⑦

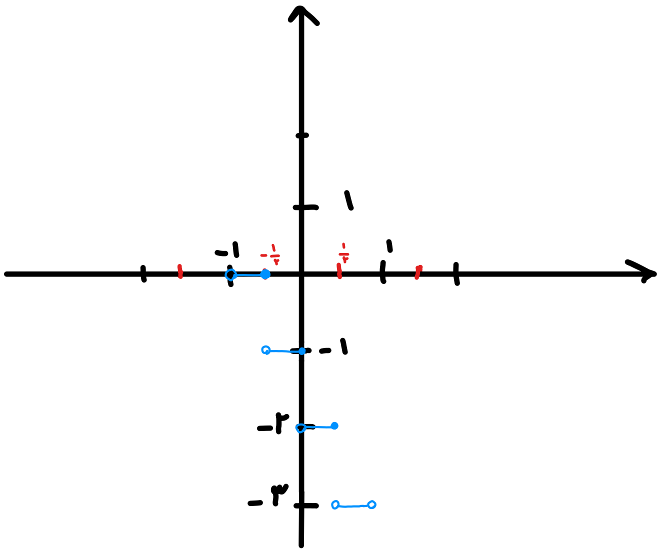
الف) $y = [-۲x] - 1 \qquad x \in (-1,1)$

$-1 < x \leq -\frac{1}{۲} \rightarrow [-۲x] = 1 \rightarrow y = ۰$

$-\frac{1}{۲} < x \leq ۰ \rightarrow [-۲x] = ۰ \rightarrow y = -1$

$۰ < x \leq \frac{1}{۲} \rightarrow [-۲x] = -1 \rightarrow y = -۲$

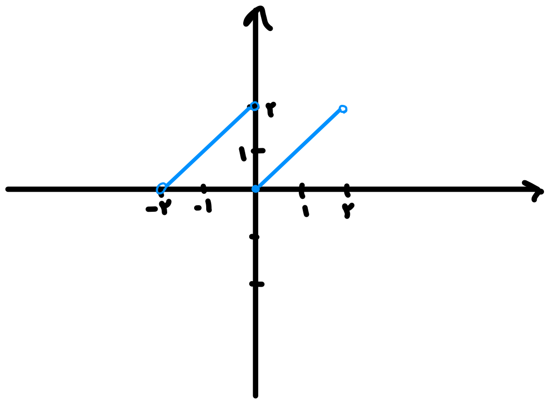
$\frac{1}{۲} < x < 1 \rightarrow [-۲x] = -۲ \rightarrow y = -۳$



ب) $y = x - ۲\left[\frac{x}{۲}\right] \qquad x \in (-۲,۲)$

$-۲ < x < ۰ \rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = -1 \rightarrow y = x + ۲$

$۰ < x < ۲ \rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۰ \rightarrow y = x$

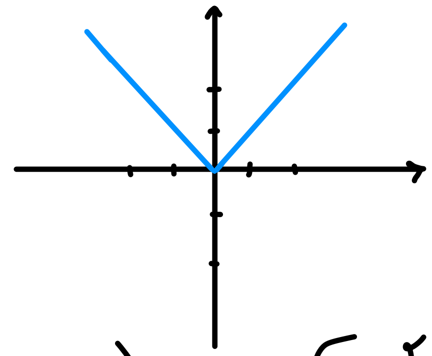


---

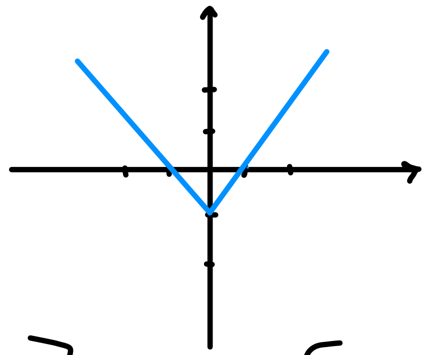
⑧

الف) $y = [||x| - 1|] \qquad x \in [-۲,۲]$

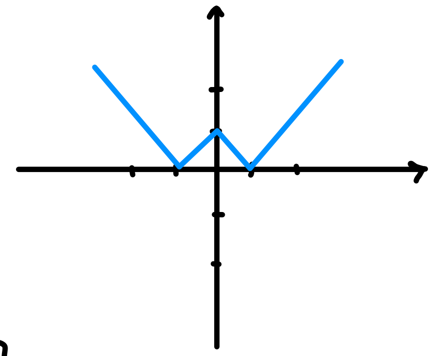
$y = |x|$



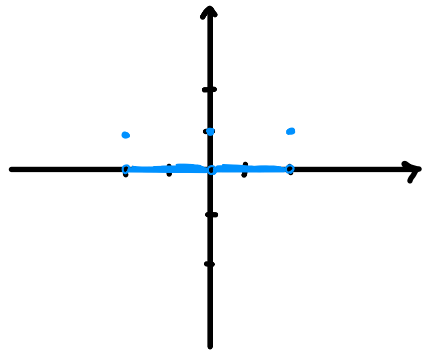
$y = |x| - 1$



$y = ||x| - 1|$



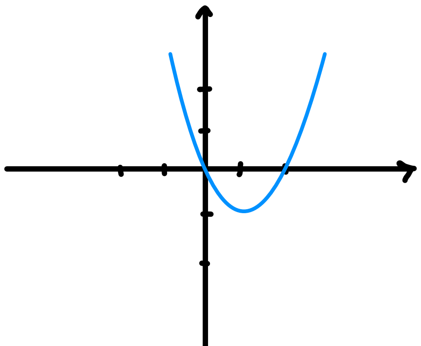
$y = [||x| - 1|]$



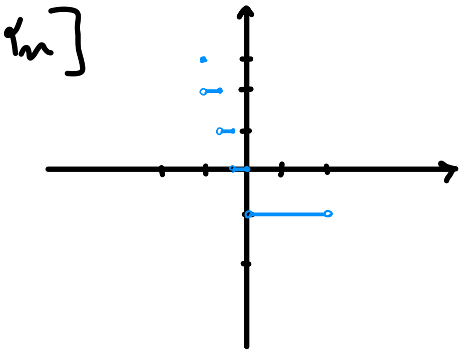
ب) $y = [x^۲ - ۲x] \qquad x \in [-1,۲]$

$y = x^۲ - ۲x$

رأس $\left| \begin{array}{l} -\frac{b}{۲a} = 1 \\ -\frac{\Delta}{۴a} = -1 \end{array} \right.$



$y = [x^۲ - ۲x]$



⑨

$$\underline{\underline{a}} + [b] = ۴,\underline{\underline{۲}} \longrightarrow [a + [b]] = [۴,۲] \longrightarrow [a] + [b] = ۴$$

$$\underline{\underline{b}} - [a] = ۲,\underline{\underline{۴}} \longrightarrow [b - [a]] = [۲,۴] \longrightarrow [b] - [a] = ۲ \quad +$$

$$۲[b] = ۶ \rightarrow [b] = ۳$$

$$\Rightarrow b = ۳,۴$$

$$[a] = ۱ \Rightarrow a = ۱,۲$$

$$a + b = ۱,۲ + ۳,۴ = \boxed{۴,۶} \Longleftarrow$$

---

⑩

$$(۱+\sqrt{۲})^۶ + (۱-\sqrt{۲})^۶ = ۱۹۸ \longrightarrow (۱+\sqrt{۲})^۶ = ۱۹۸ - (\underbrace{۱-\sqrt{۲}})^۶$$

$$-۱ < ۱-\sqrt{۲} < ۰ \longrightarrow ۰ < (۱-\sqrt{۲})^۶ < ۱$$

$$t \swarrow$$

$$[(۱+\sqrt{۲})^۶] = [۱۹۸ - \underset{\substack{\downarrow \\ ۰<t<۱}}{t}] = [۱۹۷,\dots] = \boxed{۱۹۷}$$