۲۰

سارینا اصفهانی - یازدهم دختر C - شماره تکلیف ㉓

①

$\log_n^m = a$ $\log_{mn}^{m^۲n} = b$ $a>۰$ $[b] = ?$

$n^a = m$ $(mn)^b = m^۲n$

$(n^a n)^b = n^{۲a}n$

$(n^{a+۱})^b = n^{۲a+۱}$

$n^{ab+b} = n^{۲a+۱}$

$ab+b = ۲a+۱ \to b(a+۱) = ۲a+۱ \to b = \frac{۲a+۱}{a+۱}$

$[b] = [\frac{۲a+۱}{a+۱}] = [\frac{a+۱}{a+۱} + \frac{a}{a+۱}] = [۱+\frac{a}{a+۱}]$

$= ۱ + [\underbrace{\frac{a}{a+۱}}_{صفر}]$

$[b] = ①$

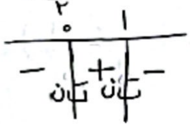
۵

---

②

الف) $y = \sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{۱}{۲}}^x}}$ ① شرط: $x>۰$

② شرط: $\frac{x}{\log_{\frac{۱}{۲}}^x} \geq ۰$

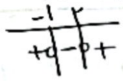


$D_f = (۰,+۱)$

ب) $\frac{\log_۴^{(x^۲-x-۲)}}{\underbrace{\sqrt{x^۲-۱}+۱}_{\text{همیشه } \oplus}}$

① شرط: $x^۲-x-۲>۰ \to (-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$

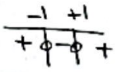
$(x-۲)(x+۱)>۰$



② شرط:

$\hookrightarrow x^۲-۱\geq۰ \to x^۲\geq۱$

$x^۲-۱\geq۰$



$\to (-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

$D_f = (-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$

۵

---

③

$۲\log_x^a + \log_a^{\sqrt{x}} = ۲$

$۲\log_x^a + \frac{۱}{\log_{\sqrt{x}}^a} = ۲$

$۲\log_x^a + \frac{۱}{\log_{x^{\frac{۱}{۲}}}^a} = ۲$

$\underbrace{۲\log_x^a}_{t} + \frac{۱}{۲\log_x^a} = ۲$

$t + \frac{۱}{t} = ۲$

$\frac{t^۲+۱}{t} = ۲ \to t^۲+۱ = ۲t$

$t^۲-۲t+۱=۰$

$(t-۱)^۲=۰$

$t=۱$

$t = ۲\log_x^a = ۱$

$\log_{\boxed{x}}^a = \frac{۱}{۲}$

۹

$\log_۹^a = \frac{۱}{۲}$

$a = (۹)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۹} = ③$

۵

④

$\log ۲ = ۰٫۳ \quad \log ۳ = ۰٫۴$

$$\left(\log \tfrac{۵}{۳}\right)x^۲ + (\log ۹)x - \log ۱۵ = ۰$$

$$\log \tfrac{۵}{۳} = \underbrace{\log ۵}_{\log \frac{۱۰}{۲}} - \log ۳ = (\log ۱۰ - \log ۲) - \log ۳ = ۱ - ۰٫۳ - ۰٫۴ = \underline{\underline{۰٫۳}}$$

$$\log ۹ = \log ۳^۲ = ۲\log ۳ = ۲ \times ۰٫۴ = \underline{\underline{۰٫۸}}$$

$$\log ۱۵ = \underbrace{\log ۵}_{\log \frac{۱۰}{۲}} + \log ۳ = (\log_{۱۰}^{۱۰} - \log_{۱۰}^{۲}) + \log_{۱۰}^{۳} = ۱ - ۰٫۳ + ۰٫۴ = \underline{\underline{۱٫۱}}$$

$\times ۱۰ \downarrow \quad ۰٫۳x^۲ + ۰٫۸x - ۱٫۱ = ۰$

$۳x^۲ + ۸x - ۱۱ = ۰$

$x^۲ + ۸x - ۳۳ = ۰$

$(x + ۱۱)(x - ۳) = ۰$

$\boxed{x = \frac{-۱۱}{۳}} \quad \boxed{x = \frac{۳}{۳} = ۱}$

اختلاف‌ریشه‌ها $= ۱ - \left(-\frac{۱۱}{۳}\right) = \frac{۳+۱۱}{۳} = \boxed{\frac{۱۴}{۳}}$

---

⑤

$\log_۲^۷ = ۲٫۸ \quad \log_۵^۲ = ۰٫۵ \quad \log_{۱۴}^{۱۰} = ?$

$$\log_{۱۴}^{۱۰} = \frac{\log_۲^{۱۰}}{\log_۲^{۱۴}} = \frac{\overset{۱}{\cancel{\log_۲^۲}} + \overset{۲}{\log_۲^۵}}{\underset{۱}{\cancel{\log_۲^۲}} + \underset{۲٫۸}{\cancel{\log_۲^۷}}} = \frac{۳}{۳٫۸} = \frac{۳۰}{۳۸} = \frac{۱۵}{۱۹}$$

$$\log_۵^۲ = \frac{۱}{\log_۲^۵} = ۰٫۵ \longrightarrow \frac{۱}{۰٫۵} = \log_۲^۵$$

$$\frac{\frac{۱}{۱}}{\frac{۵}{۱۰}} = \log_۲^۵ = ②$$

---

⑥

$\log_۲^۳ = ۱٫۶ \quad \log_۳^۵ = ۱٫۵ \qquad \log_{۱۵}^{۶} = ?$

$$\log_{۱۵}^{۶} = \frac{\log_۳^۶}{\log_۳^{۱۵}} = \frac{\log_۳^۳ + \log_۳^۲}{\log_۳^۳ + \log_۳^۵} = \frac{۱ + \frac{۱۰}{۱۶}}{۱ + \frac{۱۵}{۱۰}} = \frac{\frac{\cancel{۲۶}\,۱۳}{\cancel{۱۶}\,\cancel{۸}\,۴}}{\frac{\cancel{۲۵}\,۵}{\cancel{۱۰}\,\cancel{۵}}} = \frac{۱۳}{۲۰} \xrightarrow[\times ۵]{} = \frac{۶۵}{۱۰۰} = ۰٫۶۵$$

$$\log_۲^۳ = \frac{۱}{\log_۳^۲} = ۱٫۶ \longrightarrow \log_۳^۲ = \frac{۱}{\frac{۱}{\frac{۱۶}{۱۰}}} = \frac{۱۰}{۱۶}$$

⑦

$\log_{۸}^{۱۸} = m \qquad \log_{۴}^{۱۲} = ?$

$\log_{۲^{۳}}^{۱۸} = \frac{۱}{۳}\log_{۲}^{۱۸} = m$

$\frac{۱}{۳}(\underset{۱}{\cancel{\log_{۲}^{۲}}} + ۲\log_{۲}^{۳}) = m$

$\frac{۱}{۳} + \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۳} = m$

$\frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۳} = m - \frac{۱}{۳}$

$۲\log_{۲}^{۳} = ۳m-۱$

$\log_{۲}^{۳} = \frac{۳m-۱}{۲}$

$\log_{۴}^{۱۲} = \frac{۱}{۲}\log_{۲}^{۱۲} = \frac{۱}{۲}(\log_{۲}^{۴} + \log_{۲}^{۳}) =$

$\frac{۱}{۲}(\underbrace{۲\log_{۲}^{۲}}_{۲} + \frac{۳m-۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۴+۳m-۱}{۲}) =$

$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \times \frac{۳m+۳}{۲} = \boxed{\frac{۳m+۳}{۴}}$

۹

⑧

$(۰/۴)^{۲x-۱} = (\frac{۱۲۵}{۸})^{x^{۲}} \qquad \log_{۸}^{۹x+۱} = ?$

$(\frac{۵}{۲})^{-۲x+۱} = (\frac{۵}{۲})^{۳x^{۲}}$

$-۲x+۱ = ۳x^{۲} \longrightarrow ۰ = ۳x^{۲}+۲x-۱$

$۰ = x^{۲}+۲x-۳$

$۰ = (x+۳)(x-۱)$

$x = \frac{-۳}{۳} = \boxed{-۱}$ غ ق ق $\qquad x = \boxed{\frac{۱}{۳}}$ ✓ ق ق

چون $\underbrace{۹x+۱}$ منفی می‌شود

$\log_{۸}^{۹(\frac{۱}{۳})+۱} = \log_{۸}^{۴} = \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲} = \boxed{\frac{۲}{۳}}$

۹

⑨

$\log_{۸}^{b} = \frac{۲}{۳}(۱+a) \qquad \log_{۲}^{۳} = a$

۲

$\cancel{\frac{۱}{۳}}\log_{۲}^{b} = \frac{۲}{\cancel{۳}}(۱+a)$

$\log_{۲}^{b} = ۲+۲\log_{۲}^{۳} = \log_{۲}^{۴} + \log_{۲}^{۹} = \log_{۲}^{۳۶}$

$\boxed{b=۳۶}$

$\log^{(۳b-۸)} = \log^{۱۰۸-۸} = \log_{۱۰}^{۱۰۰} = \boxed{۲}$

⑩

$-۴ax^{۲}+bx+\frac{۱}{۲}c = ۰$

$\frac{۴a}{b} = ۲\log ۲ \longrightarrow \frac{۲a}{b} = \log ۲ \longrightarrow b = \frac{۲a}{\log ۲}$

$\frac{b+c}{۲} = a \longrightarrow c = ۲a-b$

$\frac{c}{a} = \frac{۲a-b}{a} = ۲-\frac{b}{a} = ۲-(\frac{۲\cancel{a}}{\log ۲} \times \frac{۱}{\cancel{a}}) = ۲-\frac{۲}{\log ۲} = ۲(۱-\underbrace{\frac{۱}{\log ۲}}_{\log_{۲}^{۱۰}})$

۹

$= ۲-۲\log_{۲}^{۱۰} = ۲-\log_{۲}^{۱۰۰}$

$\frac{۱}{\sqrt[۸]{۲}} = (۲^{-\frac{۱}{۸}})^{۲-۲\log_{۲}^{۱۰}} = (۲^{-\frac{۱}{۸}})^{۲(\underbrace{\overset{\log_{۲}^{۲}}{۱}-\log_{۲}^{۱۰}}_{\log_{۲}^{۰/۲}})}$

$$۲^{-\frac{۱}{۴}\log_{۲}^{۰/۲}} = ۲^{\log_{۲^{۴}}^{۵}} = ۵^{\log_{۲^{۴}}^{۲}} = ۵^{\frac{۱}{۴}\log_{۲}^{۲}} = \sqrt[۴]{۵}$$