یازدهم ونیم شب (C)

۲۰

بهار بنایی

Subject:

Date: / /

①

$\log_n^m = a \Rightarrow n^a = m \qquad \log_{mn}^{m^2 n} = b \Rightarrow \log_{n^{a+1}}^{n^{2a+1}} = b \Rightarrow \frac{2a+1}{a+1}\cancel{\log_n^n} = b$

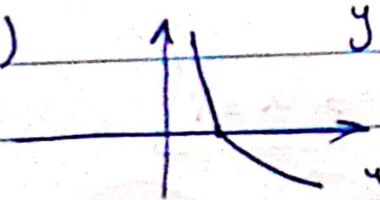
$[b] = \left[\frac{2a+1}{a+1}\right] \Rightarrow [b] = \left[\frac{a}{a+1} + 1\right] \to [b] = \left[\frac{a}{a+1}\right] + 1$

$a > 0 \;,\; 0 < \frac{a}{a+1} < 1$

$[b] = 0 + 1 = \boxed{1}$

②

الف)



$y = \sqrt{\frac{x}{\log_{\frac{1}{2}}^x}}$

$y = \log_{\frac{1}{2}}^x$

$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}^x > 0 \end{array}\right\} \to 0 < x < 1$

هیچ عدد حقیقی شامل نمی‌شود

ب) $y = \dfrac{\log_2^{(x^2-x-2)}}{\sqrt{x^2-1}+1} \Rightarrow \sqrt{x^2-1}+1 \neq 0 \to x^2-1 \geq 0 \;,\; x^2-x-2 > 0$

$\begin{array}{c|c|c} & -1 & 2 \\ + & - & + \end{array}$

$x > 2$ یا $x < -1$

$x^2-1 \geq 0 \to x^2 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \text{یا} \\ x \leq -1 \end{cases}$ $\qquad \sqrt{x^2-1}+1 \neq 0$ —— همیشه هست

$\cap \Rightarrow (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$

YASHA

Scanned with CamScanner

(۳)

$$۲\log_{x}^{۹}+\log_{a}^{\sqrt{x}}=۲ \Rightarrow ۲\log_{۹}^{a}+\log_{a}^{\sqrt{۹}}=۲ \rightarrow \log_{۳}^{a}+\log_{a}^{۳}=۲$$

$\log_{۳}^{a}=t$ $$\log_{۳}^{a}+\frac{۱}{\log_{۳}^{a}}=۲ \rightarrow t+\frac{۱}{t}=۲$$

$$\xrightarrow{\times t} t^{۲}-۲t+۱=۰ \Rightarrow t=۱$$ ۲)

$$(t-۱)^{۲}=۰$$

$$\Rightarrow \log_{۳}^{a}=۱ \longrightarrow \boxed{a=۳}$$

(۴)

$\log ۲ \simeq ۰٫۳$

$\log ۳ \simeq ۰٫۴$

$$(\log\frac{۵}{۳})x^{۲}+(\log ۹)x-\log ۱۵=۰$$

$$\hookrightarrow (\log ۵-\log ۳)x^{۲}+(۲\log ۳)x-\log ۵-\log ۳=۰$$

$$\hookrightarrow (\log ۵)x^{۲}-۰٫۴x^{۲}+۰٫۸x-\log ۵-۰٫۴=۰$$

$$\hookrightarrow (\log\frac{۱۰}{۲})x^{۲}-۰٫۴x^{۲}+۰٫۸x-\log\frac{۱۰}{۲}-۰٫۴=۰$$ ۲)

$$\hookrightarrow (\log ۱۰-\log ۲)x^{۲}-۰٫۴x^{۲}+۰٫۸x-(\log ۱۰-\log ۲)-۰٫۴=۰$$

$\hookrightarrow$

$$\hookrightarrow (۱-۰٫۳)x^{۲}-۰٫۴x^{۲}+۰٫۸x-(۱-۰٫۳)-۰٫۴=۰$$

$$\hookrightarrow ۰٫۳x^{۲}+۰٫۸x-۱٫۱=۰ \longrightarrow x=-۱۱/۳,\ x=۱ \rightarrow \boxed{۱-(-\frac{۱۱}{۳})=\frac{۱۴}{۳}}$$

YASHA

(۵)

$\log_{۲}^{۷}=۲٫۸$ $\log_{۵}^{۲}=۰٫۵$ $\log_{۱۴}^{۱۰}=?$

$$\frac{\log ۲}{\log ۵}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\log ۲}{\log\frac{۱۰}{۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{\log ۲}{\log ۱۰-\log ۲}=\frac{۱}{۲}\to\frac{\log ۲}{۱-\log ۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$

$$\log ۲=\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{\log ۷}{\log ۲}=\frac{۲۸}{۱۰}\Rightarrow\frac{\log ۷}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۲۸}{۱۰}\Rightarrow\log ۷=\frac{۱۴}{۱۵}$$

$$\frac{۱}{\log ۱۴}=\frac{۱}{\log ۲+\log ۷}=\frac{۱}{\frac{۱}{۳}+\frac{۱۴}{۱۵}}=\boxed{\frac{۱۵}{۱۹}}$$

(۶)

$\log_{۳}^{۵}=۱٫۵$ $\log_{۲}^{۳}=۱٫۶$ $\log_{۱۵}^{۶}=?$

$$\log_{۳}^{۵}\times\log_{۲}^{۳}=\log_{۲}^{۵}\to ۱٫۵\times ۱٫۶=۲٫۴\to\log_{۲}^{۵}=۲٫۴$$

$$\log_{۱۵}^{۶}=\frac{\log_{۲}^{۶}}{\log_{۲}^{۱۵}}\Rightarrow\log_{۵}^{۶}=\frac{\log_{۲}^{۳}+\log_{۲}^{۲}}{\log_{۲}^{۳}+\log_{۲}^{۵}}=\frac{۱+۱٫۶}{۱٫۶+۲٫۴}=\frac{۲٫۶}{۴}=\boxed{۰٫۶۵}$$

Subject:

Date: / /

۷

$\log_{۸}^{۱۸} = m$ $\quad$ $\log_{۴}^{۱۲} = \frac{\boxed{\log_{۸}^{۱۲}}}{\log_{۸}^{۴}}$

$$\log_{۸}^{۱۲} = \log_{۸}^{۴} + \log_{۸}^{۳} = \log_{۲^۳}^{۲^۲} + \log_{۲^۳}^{۳} =$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲} + \frac{۱}{۳}\log_{۲}^{۳} = \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳}\log_{۲}^{۳}$$

$$\log_{۸}^{۴} = \log_{۲^۳}^{۲^۲} = \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$\log_{۸}^{۱۸} = m \Rightarrow \log_{۸}^{۹} + \log_{۸}^{۲} = m \to \log_{۲^۳}^{۳^۲} + \log_{۲^۳}^{۲} = m \to \frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۳} + \frac{۱}{۳}\log_{۲}^{۲} = m$$

$$\frac{۲}{۳}\log_{۲}^{۳} + \frac{۱}{۳} = m \to \log_{۲}^{۳} = \frac{۳m-۱}{۲}$$

$$\log_{۴}^{۱۲} = \frac{\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳}\log_{۲}^{۳}}{۲/۳} \Rightarrow \frac{\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳}\left(\frac{۳m-۱}{۲}\right)}{۲/۳} = \frac{۲ + \left(\frac{۳m-۱}{۲}\right)}{۲} = \frac{۴+۳m-۱}{۲}$$

$$\boxed{\frac{۳(m+۱)}{۴}} = \frac{۳m+۳}{۴}$$

Subject:　　　　　　　　Date: / /

$۰٫۴ = \frac{۲}{۵}$　　$(۰٫٤)^{۲x-۱} = \left(\frac{۱۲۵}{۸}\right)^{x^۲} \Rightarrow \left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲x-۱} = \left(\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳}\right)^{x^۲}$　⑧

$\left(\frac{۲}{۵}\right)^{۲x-۱} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳x^۲} \Rightarrow \left(\frac{۵}{۲}\right)^{-۲x+۱} = \left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳x^۲} \Rightarrow ۳x^۲ = -۲x+۱$

$۳x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$

$x = -۱ \rightarrow$ ✗

$x = \frac{۱}{۳} \rightarrow$ ✓

$\log\left(۹\left(\frac{۱}{۳}\right)+۱\right) = \log_{۸} ۴ = \log_{۲^۳} ۲^۲$

$\frac{۲}{۳} \log_{۲} ۲ = \boxed{\frac{۲}{۳}}$

---

⑨

$\log_{۲} ۳ = a$　　$\log_{۸} b = \frac{۲}{۳}(۱+a)$

$\log_{۸} b = \frac{۲}{۳}(۱+\log_{۲} ۳)$

$\log_{۸} b = \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳}\log_{۲} ۳ \Rightarrow \log_{۸} b = \frac{۲}{۳} + \log_{۸} ۹$

$\log_{۸} b - \log_{۸} ۹ = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \log_{۸} \frac{b}{۹} = ۲/۳ \rightarrow \frac{b}{۹} = ۸^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow \frac{b}{۹} = \sqrt[۳]{۸^۲} \Rightarrow \frac{b}{۹} = ۴$

$b = ۳۶$

$\log(۳b-۱) = \log(۱۰۸-۸) = \log ۱۰۰ = \boxed{۲}$

Subject:

Date: / /

۱۵

۹

$-۴ax^۲+bx+\frac{۱}{۲}c=۰ \qquad \frac{۱}{\frac{-b}{-۴a}}=\log ۴ \Rightarrow \frac{۴a}{b}=\log ۴$

$\Rightarrow \frac{\log ۴}{۴}=\frac{a}{b}=\frac{۲\log ۲}{۴}=\frac{\log ۲}{۲} \qquad ۲a=b+c \Rightarrow ۲\frac{a}{b}=۱+\frac{c}{b}$

$\xrightarrow{\frac{a}{b}=\frac{\log ۲}{۲}} ۲\left(\frac{\log ۲}{۲}\right)=۱+\frac{c}{b} \Rightarrow \frac{c}{b}=-۱+\log ۲$

$\begin{cases} \frac{c}{b}=\log ۲-۱ \\ \frac{a}{b}=\frac{\log ۲}{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{-۱+\log ۲}{\frac{\log ۲}{۲}} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{\log ۲-\log ۱۰}{\frac{۱}{۲}\log ۲} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\log \frac{۲}{۱۰}}{\frac{۱}{۲}\log ۲}=\frac{\log \frac{۱}{۵}}{\frac{۱}{۲}\log ۲}=\frac{\log \frac{۱}{۵}}{\log \sqrt{۲}}=\log_{\sqrt{۲}} \frac{۱}{۵}$

$\left(\frac{۱}{\sqrt[۸]{۲}}\right)^{\frac{c}{a}}=\left(\frac{۱}{\sqrt[۸]{۲}}\right)^{\log_{\sqrt{۲}} \frac{۱}{۵}}=\left(\frac{۱}{۵}\right)^{\log_{\sqrt{۲}} \frac{۱}{\sqrt[۸]{۲}}}$

$\left(\frac{۱}{۵}\right)^{\log_{۲^{۱/۲}} ۲^{-۱/۸}}=\left(\frac{۱}{۵}\right)^{\left(\frac{-۱/۸}{۱/۲}\right)\log_۲ ۲} \Rightarrow \left(\frac{۱}{۵}\right)^{-۱/۴}=۵^{۱/۴}=\sqrt[۴]{۵}$

YASHA