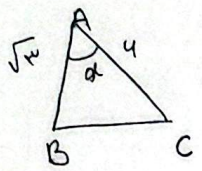
۱.



$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin\alpha = ۶\sqrt{۳}$

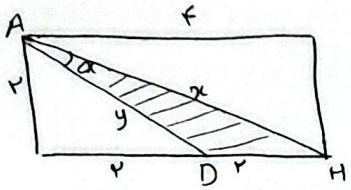
$۹ = ۴\sqrt{۳} \times \sin\alpha \longrightarrow \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۶} \longrightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\alpha$

$\alpha = ۶۰$ min

$\alpha = ۱۲۰$ max

$\frac{۱۲۰}{۶۰} = ۲$

۲.



$x = ۲^۲ + ۴^۲ \Rightarrow \sqrt{۲۰}$

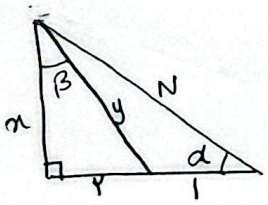
$y = ۲^۲ + ۲^۲ \Rightarrow \sqrt{۸}$

$S_{ADH} = ۸ - ۲ - ۴ = ۲ \longrightarrow \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۵} \times \sin\alpha = \sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$

$(\sqrt{۱۰})^۲ = ۱^۲ + ۳^۲ \Rightarrow ۳ = ۳$

$\cot\alpha = ۳$

۳.



$\cos۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$

$\sin۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$

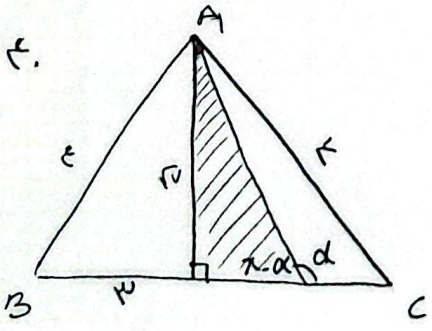
$\frac{x}{y} = \left(\frac{۳}{N}\right)^۲ - \left(\frac{x}{N}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۹ - x^۲}{N^۲} = \frac{N}{y}$

$\frac{۲}{y} = ۲ \times \frac{x}{N} \times \frac{۳}{N} = \frac{۶x}{N^۲} = ۶yx$

$\frac{۹ - x^۲}{۳xy} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = ۳$

$\cot\alpha = \frac{۳}{x} = ۲$

۴.



$AB^۲ = AH^۲ + BH^۲ \longrightarrow ۱۶ = AH^۲ + ۹ \quad AH^۲ = ۷$

$AH = \sqrt{۷}$

$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{۷}}{۳} \longrightarrow -\tan\alpha = \frac{\sqrt{۷}}{۳}$

$\tan\alpha = -\frac{\sqrt{۷}}{۳}$

۵. $۲\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = \frac{۴}{۳}$

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \longrightarrow ۱ - \sin^۲\alpha = \cos^۲\alpha$

$\Rightarrow \sin^۲\alpha = \frac{۱}{۳}$ $\qquad \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$

$\tan^۲\alpha = \frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۶} = \boxed{\frac{۱}{۲}}$

---

۶. $\frac{\sin^۴\alpha + ۴(۱-\sin^۲\alpha)}{۲-\sin^۲\alpha} - \frac{\cos^۴\alpha + ۴(۱-\cos^۲\alpha)}{۲-\cos^۲\alpha} = ۰ \quad \frac{\sin^۴\alpha - ۴\sin^۲\alpha + ۴}{۲-\sin^۲\alpha} - \frac{\cos^۴\alpha - ۴\cos^۲\alpha + ۴}{۲-\cos^۲\alpha}$

$= \frac{(\sin^۲\alpha - ۲)^۲}{۲-\sin^۲\alpha} - \frac{(\cos^۲\alpha - ۲)^۲}{۲-\cos^۲\alpha} = \cos ۲\alpha$

---

۷. $\sin(\frac{۹\pi}{۲} + \alpha)\cos(\frac{۷\pi}{۶} - \alpha) - \tan(\alpha - \frac{۵\pi}{۲}) = \sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha)\cos(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) + \tan(\frac{۵\pi}{۲} - \alpha)$

$\cos(\alpha)(-\sin(-\alpha)) + \cot(\alpha)$

$\tan\alpha = \frac{۴}{۳} \rightarrow \boxed{\alpha = ۳?!}$

$\cos = -\frac{۳}{۵}$

$\sin\alpha = -\frac{۴}{۵}$

$\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$

$\left(-\frac{۳}{۵}\right)\left(-\left(-\frac{۴}{۵}\right)\right) + \frac{۳}{۴} = \frac{-۱۲}{۲۵} + \frac{۳}{۴}$

$\frac{-۴۸ + ۷۵}{۱۰۰} = \frac{۲۷}{۱۰۰}$

---

۸. $۳\cos ۴x + \sqrt{۲}(\sin x - \cos x)$

$\sqrt{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴})$

$۳\cos ۴x + ۲\sin(x - \frac{\pi}{۴}) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{۱۲}} ۳\cos(\frac{\pi}{۳}) + ۲\sin(\frac{\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۴}) = ۳ \times \frac{۱}{۲} + ۲ \times \frac{۱}{۲} = \boxed{\frac{۱}{۲}}$

---

۹. $\tan(\frac{\alpha}{۲}) = \frac{۱}{۴}$

$\sin\alpha = \frac{۲\tan(\frac{\alpha}{۲})}{۱ + \tan^۲(\frac{\alpha}{۲})} = \frac{\frac{۲}{۴}}{۱ + \frac{۱}{۱۶}} = \frac{۸}{۱۷}$

$\cos\alpha = \frac{۱ - \tan^۲(\frac{\alpha}{۲})}{۱ + \tan^۲(\frac{\alpha}{۲})} = \frac{۱ - \frac{۱}{۱۶}}{۱ + \frac{۱}{۱۶}} = \frac{\frac{۱۵}{۱۶}}{\frac{۱۷}{۱۶}} = \frac{۱۵}{۱۷}$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{۸}{۱۷}}{\frac{۱۵}{۱۷}} = \frac{۸}{۱۵}$

$\rightsquigarrow \frac{\frac{۸}{۱۵} - \frac{۷}{۱۷}}{\frac{۸}{۱۷} - \frac{۱۵}{۱۷}} = \frac{۵\left(\frac{۳}{۱۵ \times ۱۷}\right)}{\frac{-۷}{۱۷}} = -\frac{۸ \times ۵}{۱۵ \times ۳} = \frac{-۱۶}{۱۵}$

۱۰) $۲\sin\alpha < \sin ۲\alpha$

$۰ < \frac{\cot\alpha}{\sin\alpha} \rightsquigarrow \cdot < \frac{\cos\alpha}{\sin^۲\alpha} \rightarrow \cos\alpha > ۰$

$\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha} > ۰ \rightarrow \frac{\cos}{\sin^۲\alpha} > ۰$

$۲\sin\alpha < \sin ۲\alpha \rightarrow ۲\sin\alpha < ۲\sin\alpha\cos\alpha$

$\rightarrow \sin^۲\alpha > ۰ \rightarrow \cos\alpha > ۰$

$\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha > ۰ \quad \sin\alpha < ۰$