دریا ریالی دوردستی

۱

$\cot a = \frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$, $\frac{1}{\sqrt{\cos^2 a}} - \frac{1}{\cot a} = \frac{1-\sin a}{|\cos a|}$

$\frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sqrt{\sin^2 a}} = \frac{\cos a}{|\sin a|} = \frac{\cos a}{\sin a} \to |\sin a| = \sin a \to \sin a > 0$

$\frac{1}{\sqrt{\cos^2 a}} - \frac{1}{\frac{\cos}{\sin}} \Rightarrow \frac{1}{|\cos a|} - \frac{\sin}{\cos} = \frac{1-\sin a}{|\cos a|} \to \cos a > 0$

→ انتهای کمان در ناحیه اول مثلثاتی

۲

$-\frac{\pi}{۱۲} < x < \frac{۵\pi}{۱۲}$, $\sin ۲x = \frac{m-۱}{۴}$

$-\frac{\pi}{۶} < ۲x < \frac{۵\pi}{۶}$

$\to -\frac{۱}{۲} < \sin ۲x \le ۱ \to \left(-\frac{۱}{۲} < \frac{m-۱}{۴} \le ۱\right) \times ۴$

$-۲ < m-۱ \le ۴ \to \boxed{-۱ < m \le ۵}$

۳

$\tan + \cot x = -۳ \to \frac{۱}{\sin x \cos x} = -۳ \to -۳\sin x\cos x = ۱ \to \sin x \cos x = -\frac{۱}{۳}$

$\frac{۳\pi}{۲} < ۲x < ۲\pi$

$\frac{۳\pi}{۴} < x < \pi$

$\cos x < ۰$, $\sin x > ۰$

$\frac{۱}{\sin^۳ x + \cos^۳ x} = \frac{۱}{(\sin + \cos x)} \times \frac{۱}{(\sin^۲ + \cos^۲ - \sin\cos x)}$

$(\sin + \cos x)^۲ = \sin^۲ + \cos^۲ + ۲\sin x\cos x = ۱ + ۲ \times -\frac{۱}{۳} = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$

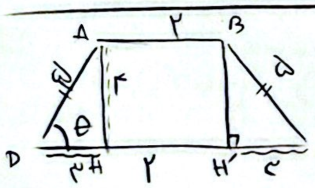
(با توجه به ناحیه) $\sin + \cos x = -\sqrt{\frac{۱}{۳}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

x حاصل جمع منفی می‌شود

$\frac{۱}{(\sin + \cos x)} \times \frac{۱}{\sin^۲ + \cos^۲ - \sin\cos} = \frac{۱}{-\sqrt{\frac{۱}{۳}}} \times \frac{۱}{۱ + \frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{-\frac{۴}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{۱}{-\frac{۴\sqrt{۳}}{۹}}$

$= \boxed{\frac{-۹}{۴\sqrt{۳}}}$

۴



$\cos\theta = \frac{DH}{AD} \Rightarrow \frac{۶}{۱۰} = \frac{DH}{۵} \to DH = ۳ = H'C$

$\sqrt{۵^۲ - ۳^۲} = ۴ = AH = BH'$ قاعده بزرگ $= ۳ + ۳ + ۲ = ۸$

مساحت ذوزنقه $= \frac{(\text{قاعده کوچک} + \text{قاعده بزرگ}) \times \text{ارتفاع}}{۲} = \frac{۱۰ \times ۴}{۲} = ۲۰$

۵

$\tan(۲۸۵)\tan(-۱۶۵) - \sin(۱۰۹۵)\cos(۲۵۵)$

$\tan(\frac{۳\pi}{۲} + ۱۵)\tan(-\pi + ۱۵) - \sin(۶\pi + ۱۵)\cos(\frac{۳\pi}{۲} - ۱۵)$

$-\cot ۱۵ \times + \tan ۱۵ - \sin ۱۵ \times (-\sin ۱۵) = -۱ + \sin^۲ ۱۵$

$-\sin^۲ ۱۵ - \cos^۲ ۱۵ + \sin^۲ ۱۵ = -\cos^۲ ۱۵$

$k\cos^۲ ۱۵ = -\cos^۲ ۱۵ \to k = -۱$

(6)

$$A = \sqrt{3}\cos(210)\sin(243) - \sqrt{2}\sin(135)\cos(153)$$

$$\sqrt{3}\times -\frac{\sqrt{3}}{2}\times \sin\left(\frac{3\pi}{2}-27\right) - \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\pi-27)$$

$$-\frac{3}{2}\times(-\cos 27) - (-\cos 27) = \frac{3}{2}\cos 27 + \cos 27 = \frac{5}{2}\cos 27$$

$$\frac{\frac{5}{2}\cos 27}{\cos 27} = \frac{5}{2}$$ برابر

---

(7)

$$f(x) = 16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right) = 16\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$16\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \to \cancel{16}\times\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{\cancel{4}}\times\frac{1}{\cancel{4}} = \frac{3}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{3}{4}\times\frac{2+\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{6+3\sqrt{3}}{16}}$$

---

(8)

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4 \to 4 + 4\sin x = 1 - \sin x$$

$$5\sin x = -3 \to \sin x = -\frac{3}{5}$$

$x \to$ ربع سوم $\to \cos x < 0,\ \sin x < 0$

$\cos x = -\frac{4}{5}$ ربع سوم

$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$; 3, 5, 4

$\tan x = \frac{3}{4}$

$180 < x < 270$

$90 < \frac{x}{2} < 135$

$\tan\frac{x}{2} < 0$ (1)

$$\tan x = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}\times\tan\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$8\tan\frac{x}{2} = 3 - 3\tan^2\frac{x}{2} \to 3\tan^2\frac{x}{2} + 8\tan\frac{x}{2} - 3 = 0$$

$$3t^2 + 8t - 3 \xrightarrow{\times 3} t^2 + 8t - 9 \to (t+9)(t-1)$$

$$\boxed{\tan\frac{x}{2} = -3}$$

$t_1 = -\frac{9}{3} = -3 = \tan\frac{x}{2} \to$ ✓

$t_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \tan\frac{x}{2}$ غ ق (1)

---

(9)

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$; $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$\frac{\cancel{2}\cancel{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}{\cancel{2}\times\cancel{\sin\frac{\theta}{2}}\times\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\cancel{2}\times\cos\frac{\theta}{2}\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}}{\cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}\times\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}} \Rightarrow 2\cot\frac{\theta}{2} = k\cot\frac{\theta}{2} \to \boxed{k=2}$$

---

(10)

ربع دوم $\alpha \to \sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$

$$\cos\left(\underbrace{\frac{11\pi}{4}}_{2\pi+\frac{3\pi}{4}}+\alpha\right) = \cos\left(2\pi+\frac{3\pi}{4}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right) = \overbrace{\cos\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\cos\alpha - \overbrace{\sin\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\alpha$$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ → $\sqrt{2}$, 10, $\sqrt{98}$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{98}}{10} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} -\frac{\sqrt{98}}{10}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\times-\frac{\sqrt{98}}{10} - \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{10}$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\times\frac{7\cancel{\sqrt{2}}}{10} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$$