-۱ آرین ملکیان یازدهم A

۱۹٫۵

الف) $f=\{(۳,۲),(n,۵),(۳,n^۲-n),(m,۲),(-۱,۴)\}$ f تابع

$n^۲-n=۲ \Rightarrow n=-۱ \to f=\{(-۱,۵),(-۱,۴),\dots\} \Rightarrow$ غ ق ق

$n=۲$ ق ق

f تابع یک به یک $\Rightarrow \cancel{n=۴}$ $n=۲$ $m=۳$

ب) $f=\{(-۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(a,m-۱),(a+۲,n),(m,۳)\}$

f تابع یک به یک $\Rightarrow m=۲ \Rightarrow f=\{(-۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(a,۱),(a+۲,n)\}$

" " $\Rightarrow a=-۱ \Rightarrow f=\{(-۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۱,n)\}$ f تابع $\Rightarrow n=۲$

۱٫۵

۲،

$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ ; & x\geq ۱ \\ ax+a ; & x<۱ \end{cases}$

۱- باید یک به یک باشد $\Rightarrow a\neq ۰$

۲- برد ها نباید عضو مشترک داشته باشند.

$y_۱=۳x-۱ ; x\geq ۱ \Rightarrow R_{y_۱}=[۲,+\infty)$

$y_۲=ax+a-۱ ; x\leq ۱ \Rightarrow R_{y_۲}=(-\infty,a+۱]$

$[۲,+\infty)\cap(-\infty,a+۱]=\varnothing$

$\Rightarrow ۲>a+۱ \Rightarrow a<۱$ یا $(-\infty,۱]$

۲

-۳

$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ ; & x\geq ۱ \\ ax+a-۱ ; & x\leq ۰ \end{cases}$

۱- $a\neq ۰$

۲- برد ها عضو مشترک نداشته باشند

$y_۱=۳x-۱ ; x\geq ۱ \Rightarrow R_{y_۱}=[۲,+\infty)$

$y_۲=ax+a-۱ ; x\leq ۰ \Rightarrow R_{y_۲}=(-\infty,a-۱]$

$(-\infty,۲a-۱]\cap[۲,+\infty)=\varnothing$

$a-۱<۲ \Rightarrow a<۳$

$\Rightarrow ۰<a<۳$

$\boxed{a\geq ۰}$

۲

۴،

الف) $y=x^۳+۲$ $\quad y_۱=y_۲ \Rightarrow x_۱^۳+۲=x_۲^۳+۲ \Rightarrow x_۱=x_۲$ یک به یک

$x^۳=y-۲ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{y-۲} \Rightarrow y=\sqrt[۳]{x-۲} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x-۲}$

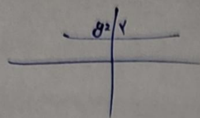
ب) $y=x^۲-۴x+۲$ پس یک به یک نیست

۲

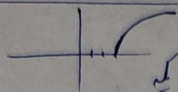
15

الف) $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ هموگرافیک پس ⟵ یک به یک $\Rightarrow x = \dfrac{2y+1}{y-3} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{2x+1}{x-3} = f^{-1}(x)}$

2

ب) $y = \dfrac{4+2x}{x+2} = 2$  یک به یک نیست.

16

الف) $y = \sqrt{x-3}$  یک به یک

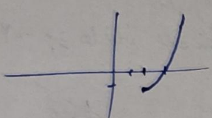
$y = \sqrt{x-3} \Rightarrow x-3 = y^2 \Rightarrow x = y^2+3$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2+3$

$R_f = D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

2

ب) $y = x^2 - 4x + 3 \ , \ x \in [2, +\infty)$

 یک به یک

$y = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1} + 2 \Rightarrow y = 2 + \sqrt{x+1} = f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 2$

$R_f = D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$

$D_f = R_{f^{-1}} = [2, +\infty)$

17

$y = x + \sqrt{x} \qquad y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 + \sqrt{x_1} = x_2 + \sqrt{x_2} \Rightarrow (x_2 - x_1) + (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) = 0$

$\Rightarrow (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\underbrace{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} + 1}) = 0 \Rightarrow \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1}$

$> 0 \Rightarrow \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} + 1 \neq 0$

$\Rightarrow x_2 = x_1 \rightarrow$ یک به یک

$y = x + \sqrt{x} \Rightarrow y = x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow y + \frac{1}{4} = (\sqrt{x} + \frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{y + \frac{1}{4}} \Rightarrow \sqrt{x} = \pm\sqrt{y - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \Longrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}}$

$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow f^{-1}(x) = x + \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{1}{4}} \\ &f^{-1}(x) = ax + b - \sqrt{x - c} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a + 2b + 4c = 1$

2

۸)

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \quad y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-2}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-2}} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1^2-2} = \frac{x_2^2}{x_2^2-2}$

$\Rightarrow \frac{x_1^2}{-2} = \frac{x_2^2}{-2} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$

به خاطر اینکه به توان ۲ رساندیم دو جواب داد و یکی از جواب ها غ ق ق است

x و y هم علامت اند

۲

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$y = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2-2} \Rightarrow x^2 = \frac{2y^2}{y^2-1} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2y^2}{y^2-1}} \Rightarrow x = \frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{y^2-1}} \Rightarrow y = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}$

x و y هم علامتند

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-1}}$

---

۹)

$g(x) = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow g^{-1}(\sqrt{x}-1) = x \qquad \sqrt{x} - 1 = -\frac{2}{5} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{9}{25}$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow f\left(\frac{x}{1+|x|}\right) = x$

۲

$\frac{x}{1+|x|} = -\frac{2}{5} \xrightarrow[x<0]{} \frac{x}{1-x} = -\frac{2}{5} \Rightarrow 5x = 2x - 2 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow f\left(-\frac{2}{5}\right) + g^{-1}\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{9}{25} - \frac{2}{3} = \frac{27-50}{75} = -\frac{23}{75} \Rightarrow f\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{3}$

---

۱۰)

$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow g^{-1}\left(\sqrt{f(x)} + f(x)\right) = x$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow f\left(\underbrace{\sqrt[3]{x-1}}_{t}\right) = x \Rightarrow f(x) = x^3 + 1$

$t \Rightarrow t^3 = x - 1 \Rightarrow x = t^3 + 1$

$\Rightarrow g^{-1}\left(\sqrt{x^3+1} + x^3 + 1\right) = g^{-1}(12) \xrightarrow[\text{g تابع}]{\text{یک به یک}} \sqrt{x^3+1} + x^3 + 1 = 12$

$\Rightarrow t^2 + t = 12 \Rightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow (t+4)(t-3) = 0 \Rightarrow t = -4 = \sqrt{x^3+1} = -4$ غ ق ق

$t = 3 \Rightarrow \sqrt{x^3+1} = 3 \Rightarrow x^3 + 1 = 9$

$\Rightarrow \boxed{x = 2}$

۲

$\Rightarrow g^{-1}(12) = 2$