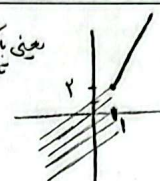
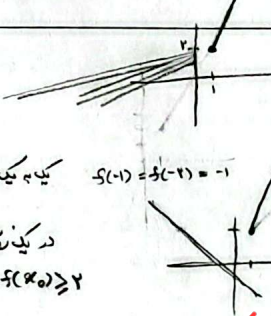
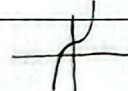


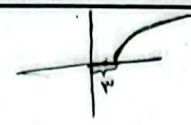
الف) $(3, 2) \in f$ و $(m, 2) \in f$ یک به یک $\Rightarrow m = 3$
 $(3, 2) \in f$ و $(3, n) \in f$ $\Rightarrow n^2 - n = 2 \Rightarrow n = 2$ یا $n = -1$ $\Rightarrow \boxed{n = 2}$
 ب) $(2, 3) \in f$ و $(m, 3) \in f$ یک به یک $\Rightarrow \boxed{m = 2}$ $m - 1 = 1$
 $(2, 3) \in f$ و $(-1, 3) \in f \Rightarrow \boxed{a = -1}$ $a + 2 = 1$
 $(1, 2) \in f$ و $(1, n) \in f \Rightarrow \boxed{n = 2}$ ✓

معنی: با کم کردن مقدار x تابع کم می شود. $x + a$ صعودی $\Rightarrow a + 1 \leq 2 \Rightarrow \boxed{a \leq 1}$ ✓


اگر $a > 0 \Rightarrow f(x) < 2 \Rightarrow a - 1 < 2 \Rightarrow a < 3 \Rightarrow \boxed{0 < a < 3}$
 اگر $a = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x \leq 0 \end{cases}$ یک به یک نیست $f(-1) = f(0) = -1$
 اگر $a < 0 \Rightarrow f(x)$ نزولی $\Rightarrow$ در یک نقطه مانند $x_1 < 0$ $f(x_1) \geq 2$ می شود
 پس جواب به صورت $\boxed{0 < a < 3}$ است ✓


الف)  یک به یک است. $y = x^3 + 2$
 $y - 2 = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y - 2} = x \Rightarrow y = \sqrt[3]{x - 2}$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$ ✓
 ب) $f(0) = f(4) = 2$ یک به یک و معکوس پذیر نیست. ✓

الف) $y = \frac{4x+1}{x-2}$ تابع همگرافیک یک به یک هستند.
 $4x - 2y = 4x + 1 \Rightarrow -2y - 1 = x(4 - y) \Rightarrow x = \frac{-2y - 1}{4 - y} = \frac{2y + 1}{y - 4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{x - 4}$ ✓
 ب) $y = 2$; $x = -2$ همگرافیک نیست. تابع ثابت است که یک به یک و معکوس پذیر نیست. ✓

الف) یک به یک  $y = \sqrt{x-3} \rightarrow y^2 = x-3 \rightarrow x = y^2+3$
 $f^{-1}(x) = x^2+3$ ✓

ب) $x^2 - 4x + 3, x \in [2, \infty)$
 $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$ نقطه به دامنه: تابع یک به یک ✓
 $x^2 - 4x + 3 - y = 0$
 $y \leq x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3-y)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4+4y}}{2} = 2 \pm \sqrt{y+1}$
 $y \leq 2 + \sqrt{y+1} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 3$ ✓

$y = x + \sqrt{x}$; $x \geq 0$
 $\Rightarrow (y-x)^2 = x \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 - x + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 - x(2y+1) + y^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2y+1 \pm \sqrt{(2y+1)^2 - 4y^2}}{2}$
 $\Rightarrow x = \frac{2y+1 \pm \sqrt{4y+1}}{2}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sqrt{x}) = 0$
 $y > 0 \Rightarrow x = \frac{2y+1 + \sqrt{4y+1}}{2}$
 $x \geq 0 \Rightarrow$
 $f^{-1}(x) = \frac{2y+1 + \sqrt{4y+1}}{2} = \frac{2x+1 + \sqrt{4x+1}}{2} = x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}$
 $f^{-1}(x) = ax+b-\sqrt{x-c} \Rightarrow a=1, b=\frac{1}{2}, c=-\frac{1}{4}$
 $a+2b+c = 1+1-1 = 1$ ✓

$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-1}} \Rightarrow \frac{x_1^2}{x_2^2} = \frac{x_1^2-1}{x_2^2-1} \Rightarrow x_1^2 x_2^2 - x_2^2 = x_1^2 x_2^2 - x_1^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$
 $[x_1 = x_2 = 0] \Leftrightarrow -\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2-1}} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-1}} \Leftrightarrow x_1 = -x_2$ اگر
 اگر $[x_1 = x_2] \Rightarrow$ تابع یک به یک ✓ $\Rightarrow$ یک به یک، معکوس پذیر
 $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow y \sqrt{x^2-1} = x \Rightarrow y^2(x^2-1) = x^2 \Rightarrow x^2(y^2-1) = y^2 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{y^2}}{y^2-1}$
 $y > 0 \Rightarrow x > 0$
 $y < 0 \Rightarrow x < 0$
 $\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y^2}}{y^2-1} & x > 0 \\ -\frac{\sqrt{y^2}}{y^2-1} & x < 0 \end{cases}$ $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} = \frac{-y}{\omega} \Rightarrow \begin{cases} \omega x_0 - y - y|x| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega x = yx - y \\ yx = -y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-y}{y} \Rightarrow f(\frac{-y}{y}) = \frac{-y}{y}$
 $g(x) = \sqrt{x} - 1 = -\frac{y}{\omega} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{\omega} \Rightarrow x = \frac{q}{16} \Rightarrow g^{-1}(\frac{-y}{\omega}) = \frac{q}{16}$
 $\frac{q}{16} - \frac{y}{y} = \frac{y^2 - \omega^2}{y\omega} = \frac{-4y}{y\omega}$ ✓

$g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} = 12 \Rightarrow f(x) = 9 \Rightarrow f^{-1}(9) = x \Rightarrow x = \sqrt[3]{9-1} = 2$
 $\Rightarrow g^{-1}(12) = 2$ ✓