

۱۸ / شیب صاف و منحنی داشته باشد

سوال (۱)

$$f = \{(1, 2), (n, 5), (1, n^2 - n), (m, 2), (-1, 4)\}$$

$$(1, 2) = (1, n^2 - n) \Rightarrow n^2 - n = 2 \Rightarrow n^2 - n - 2 = 0 \quad (n-2)(n+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n=-1 \quad (-1, 5) \text{ و } (-1, 4) \quad \text{منبع را به اشتباه می‌گیریم} \Rightarrow n=2$$

$$(1, 2) = (m, 2) \Rightarrow m=1$$

(۲)

$$f = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 3), (a, m-1), (a+2, n), (m, 3)\}$$

$$(2, 3) = (m, 3) \Rightarrow m=2$$

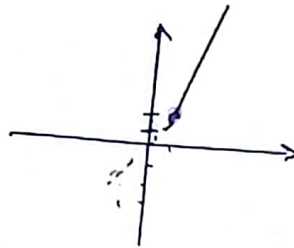
$$(a, (2)-1) = (-1, 1) \Rightarrow a=-1$$

$$((-1)+2, n) = (1, 2) \Rightarrow n=2$$

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 1 \\ x+a & x < 1 \end{cases}$$

$$x+a \Rightarrow a \leq 0$$

$$1+a \leq 2 \rightarrow a \leq 1$$

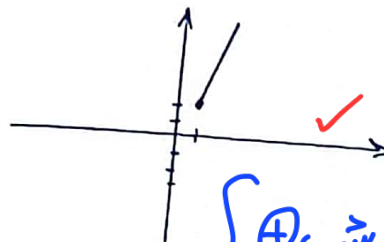


سوال (۲) (۱)

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 1 \\ ax+a-1 & x \leq 1 \end{cases}$$

$$(x=2) \Rightarrow f(2)-1 = 5$$

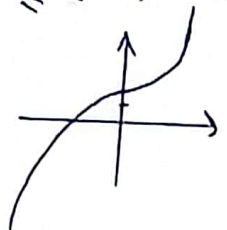
$$\Rightarrow a(0)+a-1 \leq 5 \Rightarrow a-1 \leq 5 \Rightarrow a \leq 6$$



$$\begin{cases} \text{شیب مثبت} \rightarrow a > 0 \\ a-1 < 2 \rightarrow a < 3 \end{cases} \rightarrow 0 < a < 3$$

سوال (۳)

$$f(x) = y = x^3 + 2$$



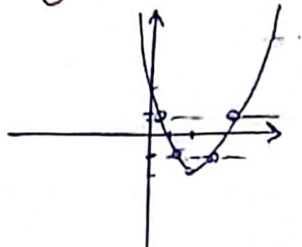
مشتق را به صورت صریح
نسبت به x در نظر بگیرید
در یک نقطه قطع می‌کند

تابع به این است

$$x = y^3 + 2 \Rightarrow y^3 = x - 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2}$$

(۲)

$$ب) y = x^2 - 4x + 1 \quad \frac{-b}{2a} = -\left(\frac{-4}{2(1)}\right) = 2 \quad (2)^2 - 4(2) + 1 = -2$$

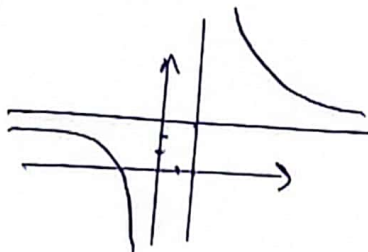


خط افقی
برخی را در دو نقطه
قطع کرده

دارد دو نقطه است $\Rightarrow$ ایست ✓

سوال ۵)

$$الف) y = \frac{2x+1}{x-2}$$

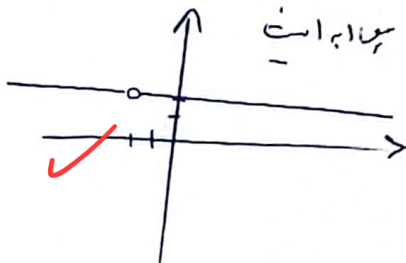


$\Rightarrow$ هر خط افقی نمودار
ایست $\Rightarrow$ تابع را در اکثر
نقطه قطع می کند

$$x = \frac{2y+1}{y-2} \Rightarrow y = -\frac{-2x-1}{x-2} = \frac{2x+1}{x-2}$$

می نویسیم هم تابع صد برابر می شود ایست ✓
خط افقی نمودار را در بی شمار نقطه قطع می کند

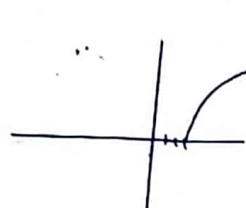
۲



$$ب) y = \frac{4+2x}{x+2} = \frac{2x+4}{x+2} = \frac{2(x+2)}{x+2} = 2, (x \neq -2)$$

سوال ۶)

$$الف) y = \sqrt{x-3}$$



هر خط افقی نمودار را در اکثر
در یک نقطه قطع می کند

ایست

$$x = \sqrt{y-3} \Rightarrow x^2 = y-3 \Rightarrow y = x^2 + 3$$

$$ب) y = x^2 - 4x + 1, x \in [2, +\infty)$$



$$\frac{-b}{2a} = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2$$

چون از طول تابع نمی
تواند تابع ایست

۲

$$x = y^2 - 4y + 1 \Rightarrow x = y^2 - 4y + 4 - 1 \Rightarrow x = (y-2)^2 - 1 \Rightarrow x+1 = (y-2)^2$$

$$\Rightarrow \pm \sqrt{x+1} = y-2 \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{x+1} \quad y \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{x+1} + 2$$

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

$$f^{-1}(x) = ax + b - \sqrt{x-c}$$

(۲)

$$y = x + \sqrt{x} \Rightarrow x - y + \sqrt{y} \Rightarrow x = \sqrt{y} + y + \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow x = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{\sqrt{y}} = \left(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 \Rightarrow \pm \sqrt{x + \frac{1}{\sqrt{y}}} = \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}} \xrightarrow{y_1 \leftarrow x_1, y_2 \leftarrow x_2} \sqrt{x + \frac{1}{\sqrt{y}}} = \sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x + \frac{1}{\sqrt{y}}} - \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt{y} \Rightarrow y = x + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}} - \sqrt{x + \frac{1}{\sqrt{y}}} = x + \frac{1}{\sqrt{y}} - \sqrt{x + \frac{1}{\sqrt{y}}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{\sqrt{y}} \\ c = \frac{1}{\sqrt{y}} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 1 + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{y}} = 1 + 1 = 2$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

(سوال ۸)

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}} \\ y_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 1}} \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - 1}} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 - 1}}$$

۲ سوال

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 - 1} = \frac{x_2^2}{x_2^2 - 1} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

این نتیجه غلط است چون در این صورت علامت
از دو طرف مخالف هم خواهد شد که این
خود بخود قیاس است.

(۲)

تابع اقلات

$$x = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

$$x^2 = \frac{y^2}{y^2 - 1} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 - 1}}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad g(x) = \sqrt{x} - 1 \quad f\left(-\frac{r}{\omega}\right) + g^{-1}\left(-\frac{r}{\omega}\right) = ? \quad (10 \text{ pts})$$

$$-\frac{r}{\omega} = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 & -\frac{r}{\omega} = \frac{x}{1+x} \Rightarrow -r - rx = \omega x \Rightarrow \sqrt{x} = -r \Rightarrow x = -\frac{r}{\omega} \quad \text{GGE} \\ x < 0 & -\frac{r}{\omega} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow -r + rx = \omega x \Rightarrow rx = -r \Rightarrow x = -\frac{r}{\omega} \quad \checkmark \end{cases}$$

$$-\frac{r}{\omega} = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow -\frac{r}{\omega} + \frac{\omega}{\omega} = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{r}{\omega} \Rightarrow x = \frac{9}{16} \quad (y)$$

$$f\left(-\frac{r}{\omega}\right) + g\left(\frac{r}{\omega}\right) = \frac{r}{\omega} + \left(-\frac{r}{r}\right) = \frac{r\omega - \omega}{\omega} = -\frac{r}{\omega} \quad \checkmark$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} \quad g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)} \quad g^{-1}(1) = ? \quad (10 \text{ pts})$$

$$1 = f(x) + \sqrt{f(x)} \Rightarrow (\sqrt{f(x)})^2 + (\sqrt{f(x)}) - 1 = 0 \quad (\sqrt{f(x)} + 1)(\sqrt{f(x)} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = 1 \quad f(x) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \checkmark$$

(y)