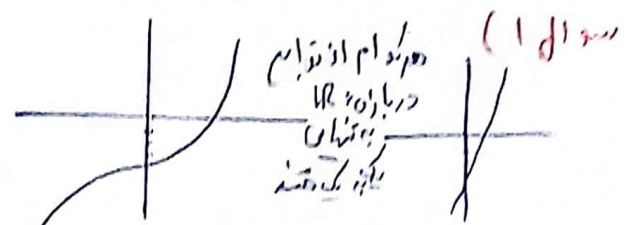
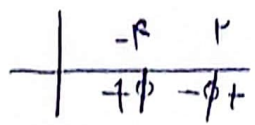


نشان بدهد که f یک تابع یک به یک و پوشا است

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & ; x > 1 \\ 12x - 1 & ; x \leq 1 \end{cases}$$



$$|12x - 1| \leq x^3 - 1 \Rightarrow x^3 - 12x + 1 \geq 0 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow a \in [1.05, +\infty)$$

$$x^3 - 12x + 1 = 0 \Rightarrow x(x^2 - 12) = -1 \Rightarrow x(x^2 - 12) = -1$$

$$f^{-1}(1) = 1$$

$$f(x) = 12x + k$$

$$\Rightarrow f(1) = 12(1) + k = 1 \Rightarrow k = -11$$

$$f(x) = 12x - 1$$

$$\text{الف) } f(1) = 12(1) - 1 = 11$$

$$\text{ب) } f(f(x)) = 12(12x - 1) - 1 = 144x - 13 = 144x - 13$$

$$f(x) = \frac{ax}{x-1}$$

$$\rightarrow f(a) = \frac{a(a)}{a-1} = 1 \Rightarrow \frac{a^2}{a-1} = 1 \Rightarrow a^2 = a - 1 \Rightarrow a^2 - a + 1 = 0$$

$$\begin{cases} a^2 - a + 1 = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\} \quad g = \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}$$

$$\text{الف) } f \circ f^{-1} = f(f^{-1}(x))$$

$$= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$\begin{matrix} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \\ 4 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \end{matrix}$$

$$\text{ب) } f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x))$$

$$= \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$\begin{matrix} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \\ 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \\ 4 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \end{matrix}$$

$$\text{ج) } f \circ g^{-1} = f(g^{-1}(x))$$

$$= \{(1, 2)\}$$

$$\begin{matrix} 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \end{matrix}$$

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$$

$$\text{د) } g^{-1} \circ f = g^{-1}(f(x))$$

$$= \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$\begin{matrix} 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \\ 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \end{matrix}$$

سوال ۷

$$f = \{(1, 4), (4, 1), (6, 0)\} \quad g = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5)\}$$

$$h = \{(1, 2), (2, 4), (4, 1), (5, 1)\}$$

$$\frac{h}{f \circ g^{-1}} = \frac{h}{f(g^{-1})} (u)$$

$$f \circ g^{-1} \quad h$$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$	$1 \rightarrow 2$
$3 \rightarrow 4 \rightarrow 8$	$3 \rightarrow 4$
$5 \rightarrow 6 \rightarrow 0$	$4 \rightarrow 1$

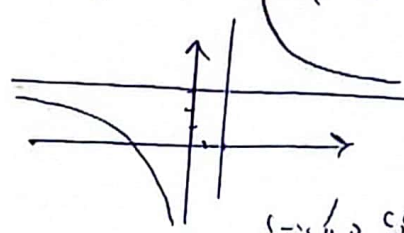
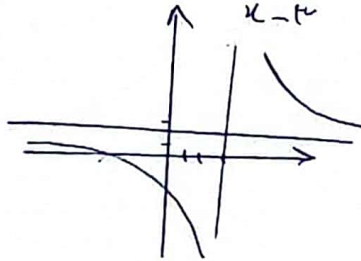
$$\frac{h}{f \circ g^{-1}} = \left\{ (1, \frac{2}{4}), (3, \frac{4}{8}), (4, \frac{1}{0}) \right\} \Rightarrow \left\{ (1, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{2}) \right\}$$

سوال ۶

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow$$

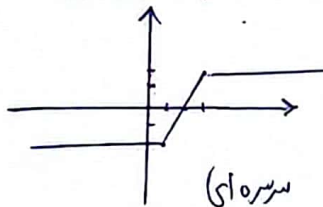
تدوین تابع را می توانیم به صورت

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow y = -\frac{-x-1}{x-2} = \frac{x+1}{x-2}$$



همه خط افقی
نمودار تابع را در یک نقطه
قطع می کند = تابع به ایت = خارج می شود

$$f(x) = |x-1| - |x-3| \rightarrow [a, b]$$



باید به شکل در بازه [3, 1] تابع وارون پذیر است.

$$f(x) = |x-1| - |x-3| \xrightarrow{1 \leq x \leq 3} f(x) = x-1 + x-3 = 2x-4$$

$$\Rightarrow y = 2x-4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{2} \Rightarrow x+4 = 2y \rightarrow y = \frac{x+4}{2} = \frac{x}{2} + 2$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3+4 & ; x \geq 1 \\ x-1 & ; x \leq 0 \end{cases}$$



باید به شکل هر خط افقی نمودار تابع را در یک نقطه قطع می کند = تابع وارون پذیر است

سوال ۸

$$x = \begin{cases} y^3+4 & ; x \geq 1 \\ x-1 & ; x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-4 = y^3 & ; x \geq 1 \\ x+1 = 4y & ; x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-4} = y & ; x \geq 1 \\ \frac{x+1}{4} = y & ; x \leq -1 \end{cases}$$

$$f(x) = x^p - \frac{(x+1)^p}{x+p} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{cx+d}{px+q} \quad f^{-1}(h)? \quad (90 \text{ سوال})$$

$$f(x) = x^p - \frac{(x+1)^p}{x+p} = \frac{x^p(x+p) - (x+1)^p}{(x+p)} = \frac{x^{p+1} + px^p - (x^{p+1} + px^p + 1)}{(x+p)} = \frac{-1}{x+p}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-y-1}{y+p} \Rightarrow y = -\frac{p+1}{x+p} = \frac{-x-1}{x+p} \left(\times \frac{p}{p} \right) = \frac{-x-1}{x+p} \Rightarrow b = -p$$

$$f^{-1}(-1) = \frac{-(-1)-1}{p(-1)+6} = \frac{1-1}{-p+6} = \frac{0}{6-p}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow x = \frac{y}{y^2+1} \Rightarrow xy^2 + x - y = 0 \Rightarrow xy^2 - y + x = 0 \quad (100 \text{ سوال})$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x^2}}{2x} \quad \bullet \Rightarrow f(x) = \frac{y}{y^2+1} = \frac{y}{\omega} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{y}{\omega}\right) = y$$

$$\Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1-4\left(\frac{y}{\omega}\right)^2}}{2\left(\frac{y}{\omega}\right)} = \frac{1 \pm \frac{y}{\omega}}{\frac{y}{\omega}} \rightarrow \frac{1 + \frac{y}{\omega}}{\frac{y}{\omega}} = \frac{1}{\frac{y}{\omega}} = \frac{\omega}{y}$$

$$\rightarrow \frac{1 - \frac{y}{\omega}}{\frac{y}{\omega}} = \frac{1}{\frac{y}{\omega}} = \frac{\omega}{y}$$

اینکه این موضوع، اهم مدنظر داریم
که تابع یک به یک است، البته اگر نخواهیم این را در نظر بگیریم، با فرضی که حاصل کنیم مطابق بالا خواهیم داشت

$$\begin{cases} y = \frac{x_1}{x_1^2+1} \\ y = \frac{x_2}{x_2^2+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2+1} = \frac{x_2}{x_2^2+1} \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$