علیرضا مومنی — پسرانه یازدهم — مسری

$16/75$

۱) $f(x)=\begin{cases} x^3-4 & ; x>a \\ 12x-20 & ; x\le a \end{cases}$ یک به یک

$a^3-4 \geqslant 12a-20$

$(a-2)^2(a+4)\geqslant 0$

$$\begin{array}{c|c|c} & -4 & 2 \\ - & + & + \end{array}$$

$a\in[-4,+\infty)$

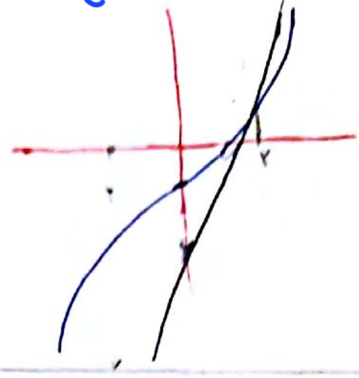
نقطه برخورد

$x^3-4=12x-20$

$x^3-12x+16=0$

$x=2 \longrightarrow a=(-\infty\ 2]$

طبق شکل باید $x\le 2$ باشد تا تابع یک به یک باشد



$0/5$

۲) $f(x)=3x+k$. $f(x)=3x-10$

$f^{-1}(2)=4 \rightarrow f(4)=2 \rightarrow 2=3(4)+k$

$\rightarrow k=-10$

$f(7)=?\quad f(7)=3(7)-10=11$

$f(f(x))=?\quad f(3x-10)=9x-30-10=9x-40$

2

۳) $A\begin{vmatrix}2a\\a\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{روی}} f^{-1}(x) \Longrightarrow B\begin{vmatrix}a\\2a\end{vmatrix} \xrightarrow{\text{روی}} f(x)$

$f(x)=\dfrac{ax}{x-1}$

$\hookrightarrow f(a)=2a \rightarrow \dfrac{a^2}{a-1}=2a \rightarrow a^2-2a=0$

$a\begin{cases}0\\2\end{cases}$

$1/75$

$a=?\quad 0$ یا 2 — $a=0$ نمی‌تواند باشد زیرا در این صورت $f(x)=0$ می‌شود و وارون پذیر نخواهد بود.

۴) $f(x)=\{(3,5)(4,7)(7,3)(9,6)\}\quad g(x)=\{(3,2)(8,6)(9,5)\}$

$f(f^{-1}(x))=\{(5,5)(7,7)(3,3)(6,6)\}$

$f(g^{-1}(x))=\{(2,5)(5,6)\}$

2

$f^{-1}(f(x))=\{(3,3)(4,4)(7,7)(9,9)\}$

$g^{-1}(f(x))\{(3,9)(7,3)(9,8)\}$

۵) $f=\{(2,4)(4,8)(6,0)\}\quad g=\{(2,1)(4,3)(6,5)\}\quad h=\{(1,2)(3,4)(4,1)(5,1)\}$

$f(g^{-1}(x))=\{(1,4)(3,8)(5,0)\}$

2

$\dfrac{h}{f(g^{-1}(x))}=?=\left\{\left(1,\frac{2}{4}\right),\left(3,\frac{4}{8}\right),\cancel{\left(5,\frac{1}{0}\right)}\right\}=\{(1,\frac{1}{2})(3,\frac{1}{2})\}$

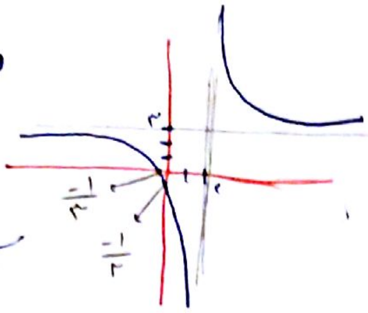
$y = \frac{۳x+1}{x-۲}$ وارون : $x = \frac{۳y+1}{y-۲}$

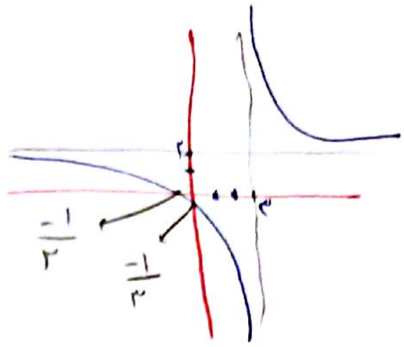
$y = \frac{۲x+1}{x-۳}$

هموگرافیک

d

یک به یک است





۲

هموگرافیک

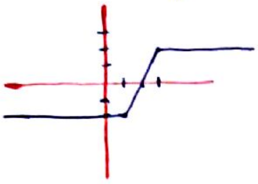
$f(x) = |x-1| - |x-۳|$

در بازه‌ی $[a,b]$ یک به یک است

$a=1 \quad b=۳$

$[1,۳]$ یک به یک است در بازه‌ی

$$\begin{array}{c|c|c} & 1 & ۳ \\ -۲ & ۲x-۴ & ۲ \end{array}$$



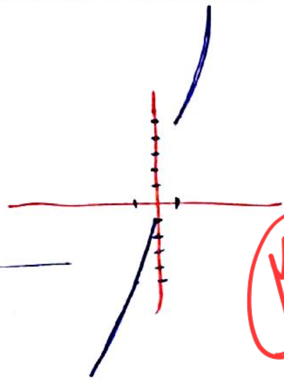
۲

وارون در بازه‌ی $[1,۳]$ $\rightarrow$ $x = ۲y - ۴ \quad 1 \leq y \leq ۳$

$y = \frac{x+۴}{۲} \quad 1 \leq y \leq ۳$

$y = \frac{x+۴}{۲} \quad -۲ \leq x \leq ۲$

$f(x) \begin{cases} x^۳+۴ & ; x \geq 1 \\ ۴x-1 & ; x \leq ۰ \end{cases}$



یک به یک است

۲

وارون $\rightarrow$ $\begin{cases} x = y^۳+۴ \rightarrow y = \sqrt[۳]{x-۴} & ; y \geq 1 \\ x = ۴y-1 \rightarrow y = \frac{x+1}{۴} & ; y \leq ۰ \end{cases}$

$\rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[۳]{x-۴} & ; x \geq ۵ \\ \frac{x+1}{۴} & ; x \leq -1 \end{cases}$

$f(x) = x^۲ - \frac{(x+1)^۳}{x+۳} = \frac{x^۳+۳x^۲-x^۳-۳x^۲-۳x-1}{x+۳} = \frac{-۳x-1}{x+۳}$

$f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{۲x+d}$ $\xrightarrow{\text{وارون}}$ $x = \frac{ay+b}{۲y+d} \rightarrow \overset{f(x)}{y} = \frac{-dx+b}{۲x-a}$

$\begin{cases} x \rightarrow ۲x \\ -۳ = -\frac{d}{۲} \rightarrow d = ۶ \\ -1 = \frac{b}{۲} \rightarrow b = -۲ \\ ۳ = -\frac{a}{۲} \rightarrow a = -۶ \end{cases}$

$f^{-1}(b) = ?\ (b<۰) \rightarrow f^{-1}(-۲) = \frac{-۶(-۲)-۲}{۲(-۲)+۶} = ۵$

۲

$f(x) = \frac{x}{x^۲+1}$ $\xrightarrow{\text{وارون}}$ $x = \frac{y}{y^۲+1} \rightarrow y = \frac{x}{1-yx}$

۰/۵

چون x و y هم علامتند پس فقط + قابل قبول است

$x = \frac{y}{y^۲+1} \rightarrow xy^۲+x = y \rightarrow xy^۲-y+x=۰$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-۴x^۲}}{۲x}$

$y = \frac{x_1}{x_1^۲+1}$

$y = \frac{x_۲}{x_۲^۲+1}$

$\frac{x_1}{x_1^۲+1} = \frac{x_۲}{x_۲^۲+1}$

$\frac{x_1^۲+1}{x_1} = \frac{x_۲^۲+1}{x_۲} \rightarrow x_1 + \frac{1}{x_1} = x_۲ + \frac{1}{x_۲} \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_۲ \\ x_1 = \frac{1}{x_۲} \end{cases}$

مثلا $y = \frac{۲}{۵}$ $x = \begin{cases} ۲ \\ \frac{1}{۲} \end{cases}$

یک به یک نیست

$f^{-1}(x) = \frac{1+\sqrt{1-۴x^۲}}{۲x} \ , \ |x| \leq 1/۲$