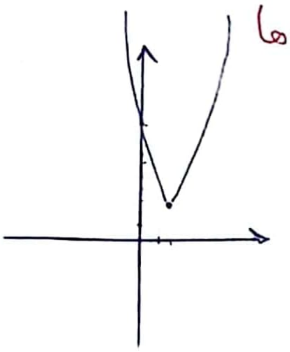
شهاب محقق - تکلیف ۱۲ کلاس دوشنبه ها

سوال ۱)

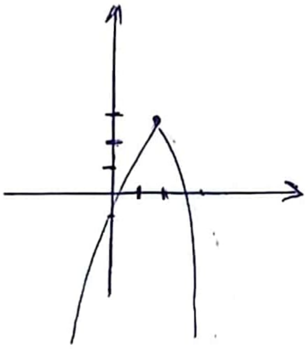
الف) $y = x^2 - 4x + 7$

$$\begin{cases} x_{ext} = \frac{-b}{2a} = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2 \\ y_{ext} = (2)^2 - 4(2) + 7 = 3 \\ a > 0 \ , \ c = 7 \end{cases}$$



ب) $y = -x^2 + 4x - 1$

$$\begin{cases} x_{ext} = \frac{-b}{2a} = -\frac{(4)}{2(-1)} = 2 \\ y_{ext} = -(2)^2 + 4(2) - 1 = 3 \\ a < 0 \ , \ c = -1 \end{cases}$$



سوال ۲)

$p(x) = y = 2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$

الف)

$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0$

$(m+1)^2 - 4(2)(\frac{1}{2}m + 2) > 0$

$m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 > 0 \Rightarrow (m-5)(m+3) > 0$

$p(x)$		-3		5	
x	+	ϕ	−	ϕ	+

$m \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$

ب)

$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$(m+1)^2 - 4(2)(\frac{1}{2}m + 2) = 0$

$m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 = 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 = 0 \Rightarrow \underset{5}{(m-5)}\underset{-3}{(m+3)} = 0$

$m = \{-3, 5\}$

ج)

$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$

$(m+1)^2 - 4(2)(\frac{1}{2}m + 2) < 0$

$m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 < 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 < 0 \Rightarrow (m-5)(m+3) < 0$

$p(x)$		-3	5	
x	+	−		+

$\Rightarrow m \in (-3, 5)$

د)

$\Delta \geq 0 \quad b^2 - 4ac \geq 0$

$(m+1)^2 - 4(2)(\frac{1}{2}m + 2) \geq 0$

$m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 \geq 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 \geq 0 \Rightarrow (m-5)(m+3) \geq 0$

$p(x)$		-3	5	
x	+	−		+

$m \in (-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$

سوال ۳)

الف)

$f(x) = y = (m-۲)x^۲ - ۲(m+۱)x + ۱۰$

$\Delta > ۰ \quad (۲(m+۱))^۲ - ۴(m-۲)(۱۰) > ۰ \quad ۴m^۲ + ۸m + ۴ - ۴۰m + ۸۰ > ۰$

$۴m^۲ - ۳۲m + ۸۴ > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۸m + ۲۱ > ۰$

$S < ۰ \quad -\frac{(-۲(m+۱))}{۲(m-۲)} < ۰ \Rightarrow \frac{۲(m+۱)}{۲(m-۲)} < ۰$

$$\begin{array}{c|ccccc} p(x) & & -۱ & & ۲ & \\ \hline x & + & | & - & | & + \end{array} \quad I$$

$P > ۰ \Rightarrow \frac{۱۰}{m-۲} > ۰ \Rightarrow m > ۲ \quad II$

$\xrightarrow[\cap]{II \text{ و } I} \varnothing \Rightarrow$ به ازای هیچ مقدار m برقرار نیست

ب)

$\Delta > ۰ \quad (۲(m+۱))^۲ - ۴(m-۲)(۱۰) > ۰ \Rightarrow ۴m^۲ + ۸m + ۴ - ۴۰m + ۸۰ > ۰$

$m^۲ - ۸m + ۲۱ > ۰ \xrightarrow[a>۰]{\Delta<۰}$ همواره برقرار

$S < ۰ \quad -\frac{(-۲(m+۱))}{۲(m-۲)} < ۰ \Rightarrow \frac{۲(m+۱)}{۲(m-۲)} < ۰ \Rightarrow$

$$\begin{array}{c|ccccc} p(x) & & -۱ & & ۲ & \\ \hline x & + & | & - & | & + \end{array} \Rightarrow m \in (-۱, ۲) \quad I$$

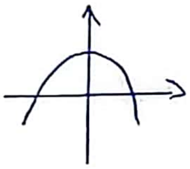
$P < ۰ \quad \frac{۱۰}{m-۲} < ۰ \Rightarrow m < ۲ \quad II$

$\xrightarrow[\cap]{I, II} m \in (-۱, ۲)$

سوال ۴)

الف)

$y = (m-۲)x^۲ - ۲(m+۱)x + ۱۰$

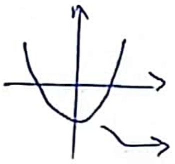


$\Delta:$ $(۲(m+۱))^۲ - ۴(m-۲)(۱۰) > ۰ \Rightarrow ۴m^۲ + ۸m + ۴ - ۴۰m + ۸۰ > ۰$

$۴m^۲ - ۳۲m + ۸۴ > ۰ \Rightarrow m^۲ - ۸m + ۲۱ > ۰$

$\xrightarrow[a>۰]{\Delta<۰}$ همواره برقرار

$a:$ $m - ۲ < ۰ \Rightarrow m < ۲$



چون عرض از مبدأ ۱۰ که بزرگتر از صفر است این حالت نمی‌تواند باشد

$\Rightarrow m \in (-\infty, ۲)$

ب)

$\frac{-b}{۲a} = -۲ \Rightarrow \frac{۲(m+۱)}{۲(m-۲)} = ۲ \Rightarrow ۲(m-۲) = (m+۱)$

$\Rightarrow ۲m - ۴ = m + ۱ \Rightarrow m = ۵$

سوال ۵) $\quad ۰ \leq \sin^۲ \leq ۱$

$\frac{۲x^۲}{۳} - (۲\sin\alpha)x + \frac{۳}{۴} = ۰$

$\Delta \geq ۰ \Rightarrow (-۲\sin\alpha)^۲ - ۴(\frac{۲}{۳})(\frac{۳}{۴}) \geq ۰ \quad ۴\sin^۲\alpha - ۴ \geq ۰ \quad \sin^۲\alpha \geq ۱ \Rightarrow \sin^۲ = ۱$

$\sin = \pm ۱$

$S > ۰ \quad ۲\sin\alpha > ۰ \rightarrow \sin\alpha > ۰$

$\xrightarrow{I} \sin = ۱$

$\Rightarrow \frac{۲}{۳}x^۲ - ۲x + \frac{۳}{۴} \Rightarrow (x^۲ - ۲x + ۱) = ۰ \rightarrow (x-۱)^۲ = ۰$

$x = \frac{۱}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۳}{۲}$

سؤال ۶)

$$y=\frac{(۳x^۲-۲x-۱)(۲x^۲-۳x-۵)}{۱-x^۲}$$

$$(۳x^۲-۲x-۱)=x^۲-۲x-۳=\underset{\frac{۳}{۳}=۱}{(x-۳)}\underset{\frac{-۱}{۳}}{(x+۱)}\Rightarrow(x-۱)\overbrace{(x+\tfrac{۱}{۳})}^{۳x+۱}$$

$$(۲x^۲-۳x-۵)=x^۲-۳x-۱۰=\underset{\frac{۵}{۲}}{(x-۵)}\underset{\frac{-۲}{۲}=-۱}{(x+۲)}\Rightarrow(x+۱)\underbrace{(x-\tfrac{۵}{۲})}_{(۲x-۵)}$$

$$=\frac{(x-۱)(۳x+۱)(x+۱)(۲x-۵)}{۱-x^۲}=-(۳x+۱)(۲x-۵)=-(۶x^۲-۱۳x-۵)$$

$$=-۶x^۲+۱۳x+۵$$ با شرط $x\neq ۱$:

$$\Rightarrow\overset{a<۰}{Max}\Rightarrow y_{Max}=\frac{-\Delta}{۴a}=-\frac{۱۳^۲-۴(۵)(-۶)}{۴(-۶)}=-\frac{۱۶۹+۱۲۰}{-۲۴}=\frac{۲۸۹}{۲۴}$$

سؤال ۷)

$mx^۲-(m+۲)x-۲=۰$ $\quad S=\frac{m+۲}{m}\ ,\ P=\frac{-۲}{m}$

$$۳S=۵P+۷\Rightarrow ۳\left(\frac{m+۲}{m}\right)=۵\left(\frac{-۲}{m}\right)+۷\xrightarrow{\times m}۳m+۶=-۱۰+۷m\ (m\neq ۰)$$

$$۴m=۱۶\Rightarrow m=۴$$

$$S^۲-۲P=\left(\frac{(۴)+۲}{(۴)}\right)^۲-۲\left(\frac{-۲}{۴}\right)=\frac{۹}{۴}+۱=\frac{۱۳}{۴}$$

سؤال ۸)

$x^۲-۵x+۲=۰$ $\quad \frac{۴\alpha+\beta^۵}{۵\beta^۲}$

$S=\alpha+\beta=۵$

$\alpha=۵-\beta\Rightarrow ۴\alpha=۲۰-۴\beta\ (I)$

$\beta^۲=۵\beta-۲\ (II)$

$$\xrightarrow{x=\beta}\beta^۲-۵\beta+۲=۰$$

$$\beta^۳=\beta\cdot\beta^۲=\beta(۵\beta-۲)=۵\beta^۲-۲\beta$$

$$\beta^۴=\beta\cdot\beta^۳=\beta(۲۳\beta-۱۰)=۲۳\beta^۲-۱۰\beta$$

$$\beta^۵=\beta\cdot\beta^۴=\beta(۱۰۵\beta-۴۶)=۱۰۵\beta^۲-۴۶\beta\longrightarrow\beta^۵=۱۰۵(۵\beta-۲)-۴۶\beta$$

$$=۵۲۵\beta-۲۱۰-۴۶\beta=۴۷۹\beta-۲۱۰$$

$$\frac{۴\alpha+(۴۷۹\beta-۲۱۰)}{۵\beta^۲}=\frac{۴\alpha+۴۷۹\beta-۲۱۰}{۵\beta^۲}\overset{(I)}{\Rightarrow}\frac{(۲۰-۴\beta)+۴۷۹\beta-۲۱۰}{۵\beta^۲}=\frac{۴۷۵\beta-۱۹۰}{۵\beta^۲}=\frac{۹۵\beta-۳۸}{\beta^۲}$$

$$\overset{I}{\Rightarrow}\frac{۹۵\beta-۳۸}{۵\beta-۲}=\frac{۱۹(۵\beta-۲)}{(۵\beta-۲)}=۱۹$$

سوال ۹)

$$\begin{cases} y_۱ = ax^۲+bx+c \xrightarrow{c=۴} ax^۲+bx+۴ \\ y_۲ = ۲x+۱۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_۱ = y_۲ \Rightarrow ax^۲+bx+c = ۲x+۱۰ \Rightarrow ax^۲+x(b-۲)-۶=۰$$

$$\begin{cases} x=۲ \longrightarrow ۴a+۲(b-۲)-۶=۰ \Rightarrow ۴a+۲b-۱۰=۰ \\ x=-۳ \longrightarrow ۹a-۳(b-۲)-۶=۰ \quad ۹a-۳b=۰ \Rightarrow \begin{matrix} ۹a=۳b \\ (۳a=b)^{*} \end{matrix} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{*} ۴a+۲(۳a)-۱۰=۰ \Rightarrow ۱۰a=۱۰ \Rightarrow a=۱ \quad , \; ۳(۱)=b \; , \; b=۳ \quad \begin{cases} y_۱ = x^۲+۳x+۴ \\ \Rightarrow x_{ext} = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

سوال ۱۲)

$$y = ۲x^۲+(m+۱)x+m+۶$$

$$\begin{cases} y_۱ = ۲x^۲+(m+۱)x+m+۶ \\ y_۲ = x \end{cases} \Rightarrow y_۱ = y_۲ \Rightarrow ۲x^۲+(m+۱)x+۶+m = x$$

$$۲x^۲+mx+۶+m=۰ \xrightarrow{\text{مماس}} \Delta=۰$$

$$m^۲-۴(۲)(۶+m)=۰ \Rightarrow m^۲=۴۸-۸m$$

$$m^۲+۸m-۴۸ \qquad (m+۱۲)(m-۴)=۰ \begin{cases} m=۴ \\ m=-۱۲ \end{cases}$$

چون گفته شده ناحیه اول باید نقطه برخورد هم علامت
x و y ناحیه اول باشد

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(m)}{۲(۲)} > ۰ \quad m<۰$$

$$m<۰ \Rightarrow m=-۱۲$$