نام و نام خانوادگی ...محمدحسین ابوفاضلی...

پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ...۱۸... کلاس ...یازدهم المپ A...

۱۸

**۱** (۲)

$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}}=\frac{5}{4}\xrightarrow[l]{\text{افزایش طول}}\frac{5+l}{4}=\frac{1+\sqrt5}{2}\longrightarrow 2(1+\sqrt5)=5+l$$

$$2+2\sqrt5=5+l\longrightarrow l=2\sqrt5-3$$

مستطیل اولیه ($5\times4$) ، مستطیل ثانویه ($(5+l)\times4$)

$$S=20$$

$$S=4(5+2\sqrt5-3)=4(2+2\sqrt5)=8(1+\sqrt5)$$

$$\Longrightarrow\frac{S_{\text{جدید}}}{S_{\text{قدیم}}}=\frac{\cancel{8}^{2}(1+\sqrt5)}{\cancel{20}_{5}}=\boxed{\frac{2+2\sqrt5}{5}}$$

**۲** (۲)

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{1+\sqrt5}{2}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}2\sqrt{a^2+b^2}=a(1+\sqrt5)\xrightarrow{\text{توان }2}4(a^2+b^2)=a^2(1+\overset{6}{5}+2\sqrt5)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=?\longrightarrow 4a^2+4b^2=\underset{2a^2}{6a^2}+2\sqrt5a^2\longrightarrow \cancel{4}b^2=\cancel{2}a^2(1+\sqrt5)$$

$$\Longrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}=\frac{2a^2}{a^2(1+\sqrt5)}=\boxed{\frac{2}{1+\sqrt5}}$$

**۳** (۲)

$$3a+\sqrt{2a^2+4a}=2\longrightarrow\sqrt{2a^2+4a}=2-3a\xrightarrow{\text{توان }2}2a^2+4a=4+9a^2-12a$$

$$\longrightarrow 7a^2-16a+4=0\longrightarrow a=\frac{16\pm\sqrt{144}}{14}$$

$\frac{a+1}{a}=?$

$$\Longrightarrow a=\frac{16\pm12}{14}\begin{cases}2\longrightarrow \text{غ ق ق}\\ \frac{2}{7}\end{cases}$$

$$\longrightarrow 3(2)+\sqrt{2(4)+4(2)}=6+4=10\longrightarrow\boxed{10\neq2}\ ✗$$

$$\longrightarrow\frac{6}{7}+\sqrt{\frac{8}{49}+\frac{8}{7}}=\frac{6}{7}+\sqrt{\frac{64}{49}}=\frac{6}{7}+\frac{8}{7}=\frac{14}{7}=2\ ✓$$

$$\longrightarrow\frac{a+1}{a}=\frac{\frac{2}{7}+\frac{7}{7}}{\frac{2}{7}}=\frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}}=\boxed{\frac{9}{2}=4.5}$$

**۴** (۱٫۵)

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3}-\frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}}=\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\longrightarrow\frac{\cancel{3\sqrt{x+1}}-(\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1})-(\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1})-\cancel{3\sqrt{x+1}}}{9-(x-1)}=\sqrt{x-1}$$

$?=$ چند ریشه مثبت — مزدوج — $\sqrt{x-1}$

$x=12\mp4\sqrt3\rightarrow$ $\boxed{12+4\sqrt3\quad \text{ق ق}}$

دقت!

$$\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{10-x}=\sqrt{x-1}\xrightarrow{\text{توان }2}\frac{4(x^2-1)}{100+x^2-20x}=x-1$$

$10-x<0\rightarrow x\geq10$

$$4x^2-4=100x+x^3-20x^2-100-x^2+20x$$

$$4x^2-4=x^3-21x^2+120x-100$$

$$\Longrightarrow x^3-25x^2+120x-96=0\xrightarrow[\text{بخش‌پذیر }(x-1)]{\text{مجموع ضرایب صفر}}(x-1)(x^2-24x+96)$$

ریشه مخرج $x=1$

$\Delta>0,\ P>0,\ S>0\longrightarrow$ ~~۲~~ ریشه مثبت

$\Longrightarrow$ در کل دارای ~~۲~~ یکی ریشه مثبت است

**۵** (۲)

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{1}{2-\sqrt{2-x}}=\frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}}\sqrt{2-x}=t$$

$?=$ چند ریشه مثبت

$$\frac{1}{t+2}-\frac{1}{2-t}=\frac{t^2}{5t}\longrightarrow\frac{\cancel{2}-t-t-\cancel{2}}{4-t^2}=\frac{t}{5}\longrightarrow\frac{-2t}{4-t^2}=\frac{t}{5}$$

$$\xRightarrow{\text{طرفین وسطین}}-10t=4t-t^3\longrightarrow t^3-14t=0\longrightarrow t(t^2-14)=0\longrightarrow t\begin{cases}0\ ✓\\+\sqrt{14}\ ✓\\-\sqrt{14}\ ✗\ \text{غ ق ق}\end{cases}\longrightarrow t=\sqrt{2-x}$$

$$\longrightarrow\begin{cases}2-x=0\longrightarrow\boxed{x=2}\longrightarrow \text{ریشه مخرج ✗ غ ق ق}\\ \sqrt{2-x}=\sqrt{14}\longrightarrow2-x=14\longrightarrow\boxed{x=-12}\xrightarrow{✗}\text{ریشه منفی}\end{cases}$$

این معادله فاقد ریشه‌ی مثبت است.

**۰٫۵** — ۶

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{160}{9} \longrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2-2x}=\frac{160}{9}$

مجموع ریشه‌ها = ؟

مخرج مشترک $\longrightarrow \frac{1+x^2-2x+x^2}{x^2\times(1-x)^2}=\frac{2x^2-2x+1}{\underbrace{x^2(1-x)^2}_{x^2+x^4-2x^3}}=\frac{160}{9}$ $\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$

$18x^2-18x+9=160x^2+160x^4-320x^3$

$\longrightarrow$ تبدیل به معادله $\longrightarrow 160x^4-320x^3+(\overset{142}{\cancel{160-18}})x^2+18x-9 \longrightarrow$ ریشه‌ها $\longrightarrow$ ۲ ریشه دارد

$\begin{cases}\alpha=2/36\\ \beta=-0/52\end{cases} \longrightarrow \alpha+\beta=2/36-0/52=1/8$

---

**۲** — ۷

$\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}}+\sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}}=x+2$ $\longrightarrow$ تجزیه‌ی عبارت زیر رادیکال

جمله مشترک

تعداد جواب‌ها = ؟

فاکتورگیری $\longrightarrow -x^2(+x-4)+25(x-4)$

$(25-x^2)(x-4)$

$-(x-2)(x-4)$

| −۵ | | ۴ | | ۵ | |
|---|---|---|---|---|---|
| + | | − | | + | − |

| ۲ | | ۴ | |
|---|---|---|---|
| − | + | | − |

* این سوال چون عبارت زیر رادیکال بزرگ است باید با دامنه‌ی تابع این سوال را حل کنیم پس برای دامنه‌گیری ابتدا عبارت زیر رادیکال را تجزیه می‌کنیم و سپس دامنه‌ی آن را حساب می‌کنیم.

$\Longrightarrow D_f \Longrightarrow$ −۵ ۲ ۴ ۵ $\Longrightarrow D_f=4$ ✓

$\boxed{\text{این معادله دارای یک جواب است}}$

---

**۲** — ۸

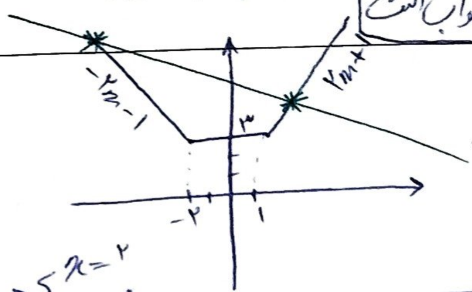
$y=|x+2|+|x-1|$ $\longrightarrow$ تابع طلایی

$3y+x=17$ $\longrightarrow$ تقاطع در A و B

اندازه $=|\overline{AB}|=?$

$\longrightarrow$ معادله خط $\longrightarrow \begin{cases}\text{شیب}=-\frac{1}{3}\\ \text{عرض از مبدا}=\frac{17}{3}\end{cases}$

| −۲ | | +۱ | |
|---|---|---|---|
| $-2x-1$ | | | $2x+1$ |




محل تقاطع $\longrightarrow$ دستگاه معادله خط

$\begin{cases}3y+x=17\\ 2x+1\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=5\end{cases}$

$\begin{cases}3y+x=17\\ -2x-1\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}x=-4\\ y=7\end{cases}$

$\Longrightarrow \overline{AB}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\sqrt{(2--4)^2+(7-5)^2}$

$\Longrightarrow \sqrt{(6)^2+(2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$ ✓

---

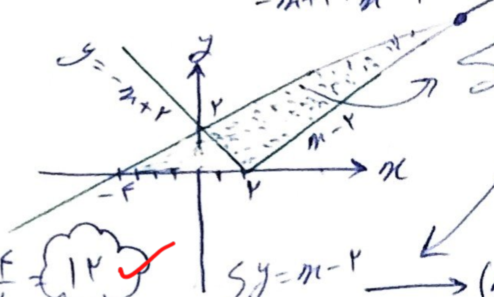
**۲** — ۹

$y=\sqrt{x^2-4x+4}$

$y=\frac{1}{2}x+2$ $\longrightarrow$ رسم نمودار محل تقاطع $\Longrightarrow \begin{cases}y=\sqrt{(x-2)^2}\longrightarrow |x-2|\\ y=\frac{1}{2}x+2\end{cases}$

| ۲ | |
|---|---|
| $-x+2$ | $x-2$ |

تقاطع دو خط




مساحت ناحیه محصور $=\frac{1}{2}\times$ (دترمینان)

$\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&1\\8&6&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times\overbrace{(4+0+0-16-12-0)}^{|-24|=24}=\frac{24}{2}=12$ ✓

$\begin{cases}y=x-2\\ y=\frac{1}{2}x+2\end{cases}\longrightarrow (x=8,\ y=6)$

---

**۲** — ۱۰

امروز $\longrightarrow \frac{1}{x-9}$ $\longrightarrow$ * ۹ ساعت زودتر

فرهاد $\longrightarrow \frac{1}{x}$

هر دو $\longrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{20}$ $\longrightarrow$ مخرج مشترک $\Longrightarrow \frac{x-9+x}{x(x-9)}=\frac{1}{20}\longrightarrow\frac{2x-9}{x^2-9x}=\frac{1}{20}$

$\Longrightarrow x^2-9x=40x-180\longrightarrow x^2-49x+180\longrightarrow(x-4)(x-45)$

$\Longrightarrow \begin{cases}x=4 & \text{غ ق ق}\\ x=45\end{cases}$ $\longrightarrow$ ریشه خارج

$\Longrightarrow$ امروز $=x-9\longrightarrow 45-9=36$ ✓ ساعت

۴)

$$\frac{1-2x+x^2+x^2}{(x(1-x))^2} = \frac{2(x^2-x)+1}{(x-x^2)^2} = \frac{140}{9} \xrightarrow{x^2-x=t} \frac{2t+1}{t^2} = \frac{140}{9}$$

$$140t^2-18t-9=0 \xrightarrow{\text{روش } \Delta} \begin{cases} t=0.3 \rightarrow x^2-x-0.3=0 \xrightarrow{\Delta>0} \boxed{S=1} \\ t=-\frac{3}{14} \rightarrow x^2-x+\frac{3}{14}=0 \xrightarrow{\Delta>0} \boxed{S=1} \end{cases}$$

$$\boxed{S=2}$$