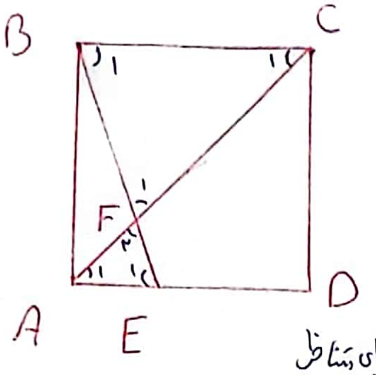
شهاب محسن تکلیف ۲۱ کلاس ریاضیات



سوال ۱)

$ED=2AE \Rightarrow AD=AE+DE=3AE \xrightarrow{ABCD\ \text{مربع}} BC=AD=3AE$

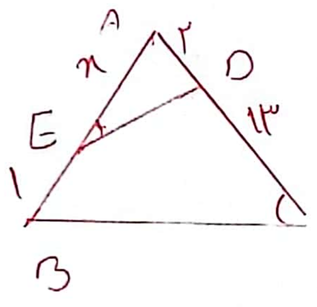
ضلع مربع را a در نظر می‌گیریم

$BC \parallel AD$ و AC مورب $\xrightarrow{\text{اصل توازی}}$ $\hat{B}_1=\hat{E}_1$ ، $\hat{C}_1=\hat{A}_1$ ، $\hat{F}_1=\hat{F}_2$ متقابل به رأس $\Rightarrow B\overset{\triangle}{C}F \sim A\overset{\triangle}{F}E$

$\xrightarrow{\text{تناسب اجزای متناظر}} \frac{BC}{AE}=\frac{CF}{AF}=\frac{BF}{EF} \Rightarrow \frac{3AE}{AE}=\frac{CF}{AF}=\frac{BF}{EF}$

$\rightarrow \begin{cases} 3AF=CF \Rightarrow AC=AF+CF=4AF \\ 3EF=BF \Rightarrow BE=BF+FE=4FE \end{cases}$ طبق رابطه فیثاغورس در مثلث‌های $B\overset{\triangle}{A}E$ ، $A\overset{\triangle}{C}D$ $\Rightarrow \begin{cases} AC^2=CD^2+AD^2 \\ BE^2=AB^2+AE^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 16AF^2=a^2+a^2 \\ 16EF^2=a^2+(\frac{a}{3})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4AF=\sqrt{2}\,a \\ 4EF=\frac{\sqrt{10}}{3}a \end{cases} \Rightarrow \frac{EF}{AF}=\frac{\frac{\sqrt{10}}{3}a}{\sqrt{2}a}=\boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}}$

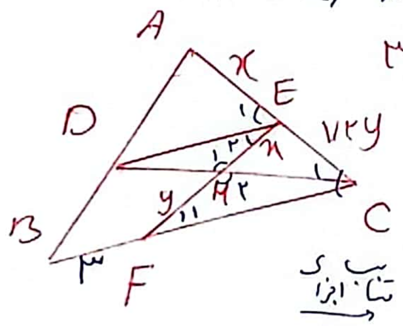


سوال ۲)

$A\hat{E}D=A\hat{C}B$ فرض ، $\hat{A}=\hat{A}$ مشترک $\Rightarrow A\overset{\triangle}{E}D \sim A\overset{\triangle}{C}B$

$\xrightarrow{\text{تناسب اجزای متناظر}} \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{ED}{BC} \rightarrow \frac{x}{15}=\frac{2}{x+1}$

$\Rightarrow x^2+x=30 \Rightarrow x^2+x-30=0 \Rightarrow (x+6)(x-5)=0$ $\begin{cases} x=-6 \text{ غ ق} \\ x=5 \text{ ق ق} ✓ \end{cases}$



سوال ۳)

$3y=5x \rightarrow x=\frac{3}{5}y$

$DE \parallel BC$ و AC مورب $\xrightarrow{\text{اصل توازی}} \hat{E}_1=\hat{C}_1$ ، $\hat{A}=\hat{A}$ مشترک $\Rightarrow A\overset{\triangle}{E}D \sim A\overset{\triangle}{C}B$

$\xrightarrow{\text{تناسب اجزای متناظر}} \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{x}{x+1.2y}=\frac{DE}{FC+3}$ (I)

$DE \parallel BC$ و DC مورب $\xrightarrow{\text{اصل توازی}} \hat{E}_2=\hat{F}_1$ ، $\hat{H}_1=\hat{H}_2$ متقابل $\Rightarrow D\hat{H}E \sim C\hat{H}F$

$\xrightarrow{\text{تناسب اجزای متناظر}} \frac{DE}{CF}=\frac{EH}{FH}=\frac{DH}{CH} \Rightarrow \frac{DE}{FC}=\frac{x}{y}=\frac{3}{5} \Rightarrow DE=\frac{3}{5}FC$

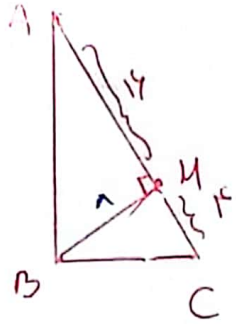
$\frac{\frac{3}{5}y}{\frac{3}{5}y+1.2y}=\frac{\frac{3}{5}FC}{FC+3} \Rightarrow \frac{0.6}{0.6+1.2}=\frac{0.6FC}{FC+3} \Rightarrow 1.8FC=FC+3 \Rightarrow 0.8FC=3$

$FC=3\times\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$

$BC=FC+BF=\frac{15}{4}+3=3/75+3=\boxed{6/75}$

سوال ۲)

راه اول:



قضیه اقلیدس: $BH^2 = AH \times CH = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow BH = 8$

رابطه فیثاغورس: $AB^2 = AH^2 + BH^2 = (16)^2 + (8)^2 = 256 + 64 = 320$

$AB = 8\sqrt{5}$

در $\triangle BHC$: $BC^2 = CH^2 + BH^2 = (4)^2 + (8)^2 = 80$

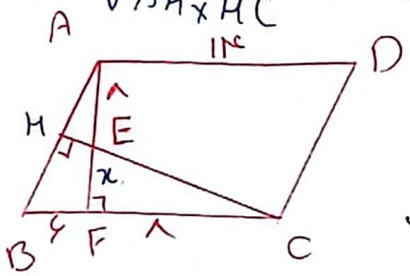
$BC = 4\sqrt{5}$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{8\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 2$$

راه دوم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{AH \times AC}}{\sqrt{AH \times HC}} = \sqrt{\frac{AC}{HC}} = \sqrt{\frac{16}{4}} = 2$$

سوال ۳)



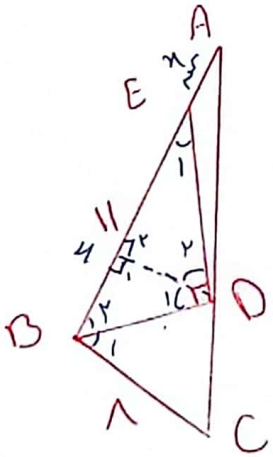
$\hat{B} = \hat{B}$ (مشترک)، $\hat{F} = \hat{H} = 90^\circ$ $\Rightarrow F\hat{E}C \sim A\hat{F}B$

تناظر، متناسب اجزای $\frac{FC}{AF} = \frac{EF}{BF} \Rightarrow \frac{8}{8+x} = \frac{x}{6}$

$\rightarrow 48 = x^2 + 8x \Rightarrow x^2 + 8x - 48 = 0 \rightarrow (x+12)(x-4) = 0 \rightarrow$ ✓ قبول $x = 4$، غیرقابل قبول $x = -12$

$AF = 8 + 4 = 12$

سوال ۴)



$DH \parallel BC$ و BD مورب $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1$

BD نیمساز $\Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{B}_1$ $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_2$

$\hat{H}_1 = 90^\circ$ $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_2 = 45^\circ$

$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 90^\circ \Rightarrow D_2 = 45^\circ$, $H_2 = 90^\circ$ $\Rightarrow \hat{E}_1 = 45^\circ$

$\frac{BE}{2} = EM = BH = 5/5 \Rightarrow HD = 5\sqrt{5}$

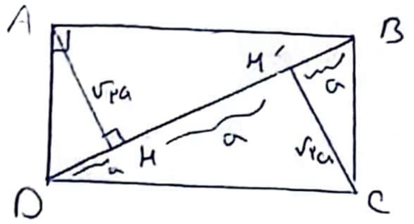
$HD \parallel BC$ تالس $\frac{AH}{AB} = \frac{HD}{BC} = \frac{AD}{AC}$

$\frac{x+5/5}{x+1} = \frac{5\sqrt{5}}{8} \Rightarrow 16x + 88 = 11x + 121$

$5x = 33$

$x = \frac{33}{5} = 6/6$

سوال ۲۷



قوانین مشابه‌ها:

$AH^2 = DH \times BH = a \times 2a = 2a^2 \Rightarrow AH = \sqrt{2}a$

$CH'^2 = BH' \times DH' = a \times 2a = 2a^2 \Rightarrow CH' = \sqrt{2}a$

طبق رابطه فیثاغورس: $CH'^2 + BH'^2 = BC^2 \Rightarrow 2a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow BC = \sqrt{3}a$

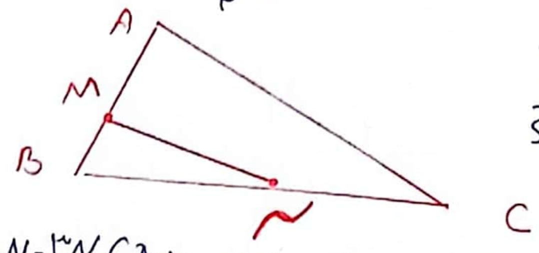
" " : $AH^2 + BH^2 = AB^2 \Rightarrow 2a^2 + 4a^2 = 6a^2 \Rightarrow AB = \sqrt{6}a$

$A\hat{H}D$ یا $BH'C$ که مثلث‌های قائم‌الزاویه‌اند مساحت هر دو مساوی است

$\Rightarrow S_{A\hat{H}D} = \frac{\sqrt{2}a \times a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 \qquad S_{\text{مستطیل}} = \sqrt{3}a \times \sqrt{6}a = 3\sqrt{2}a^2$

$$\frac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{A\hat{H}D}} = \frac{3\sqrt{2}a^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}a^2} = 6$$

سوال ۲۸



$$\frac{S_{A\hat{B}C}}{S_{B\hat{M}N}} = \frac{AB \times BC \times \sin\hat{B} \times \frac{1}{2}}{BM \times BN \times \sin\hat{B} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{1}$$

$2BN = 3NC \Rightarrow BC = BN + NC$

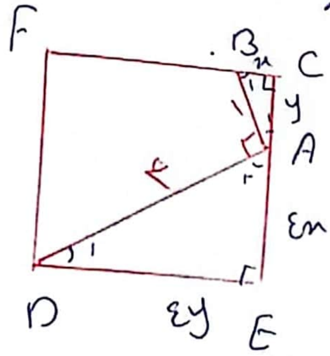
$NC = \frac{2}{3}BN \Rightarrow BC = \frac{5}{3}BN$

$$\frac{AB \times 5}{BM \times 3} = \frac{3}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{BM + AM}{BM} = \frac{9}{5} \Rightarrow 1 + \frac{AM}{BM} = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{5}{4}$$

سوال ۲۹



$\hat{C} = 90° \to \hat{B}_1 + \hat{A}_1 = 90°$, $\hat{A}_2 + \hat{A}_1 = 90°$ $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{A}_2$

$E = 90° \Rightarrow \hat{D}_1 + \hat{A}_2 = 90°$, $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90°$ $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1$

$\hat{E} = \hat{C} = 90°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow B\hat{C}A \sim E\hat{A}D \xrightarrow{\text{تناسب اجزای متناظر}} \frac{BC}{AE} = \frac{AC}{DE} = \frac{BA}{DA} = \frac{1}{4}$

$\begin{cases} BC = x \\ AC = y \end{cases} \to \frac{x}{AE} = \frac{1}{4} \Rightarrow AE = 4x$

$\frac{y}{DE} = \frac{1}{4} \Rightarrow DE = 4y$

$\xrightarrow{\text{مربع } CFDE} FD = CE = DE = CF$

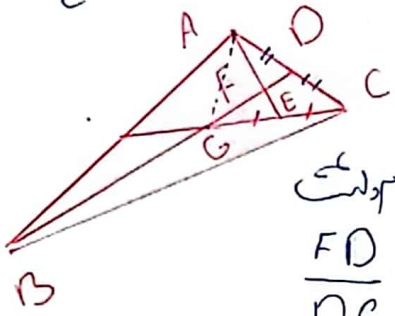
$y + 4x = 4y \Rightarrow 4x = 3y$

ادامه ←

$AE = EA = 3y$ طبق رابطه فیثاغورس: $AE^2 + DE^2 = AD^2 \Rightarrow (4y)^2 + (3y)^2 = 16$

$25y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow y = \frac{4}{5} \Rightarrow DE = 4y = 4\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{5}$

$S_{EFG} = DE^2 = \frac{16}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{256}{25}$



سوال ۱۰)

ابتدا از A به G وصل می‌کنیم.

نقطه F محل تلاقی دو میانه GD و AE در مثلث AGC هست پس خواهیم داشت

$\frac{FD}{DG} = \frac{1}{3} \Rightarrow DG = 3FD$ (I)

همچنین نقطه G محل تلاقی میانه‌ها در مثلث ABC است پس خواهیم داشت

$\frac{DG}{BD} = \frac{1}{3}$ (II)

II در I $\longrightarrow$ $\frac{3FD}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{FD}{BD} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{BD}{FD} = 9$