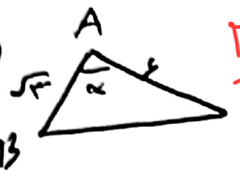
پارسا جهانگیری / یازدهم پسر A

۲۰

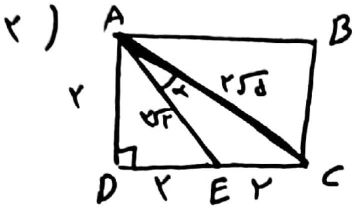
۱)


$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin\alpha = \frac{1}{\cancel{۲}} \times \sqrt{۳} \times \overset{۲}{\cancel{۴}} \times \sin\alpha = \cancel{۲/۵}\ ۱/۵$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱/۵}{\sqrt{۳}} = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۶۰^\circ \\ \text{یا} \\ \alpha = ۱۲۰^\circ \end{cases}$ $\quad \frac{۱۲۰^\circ}{۶۰^\circ} = \boxed{۲}$ ✓

②

---

۲)


$\xrightarrow[ADE \text{ در}]{\text{فیثاغورث}} AE^۲ = AD^۲ + DE^۲ \Rightarrow AE^۲ = ۴ + ۴ = ۸ \Rightarrow AE = ۲\sqrt{۲}$

$\xrightarrow[A\hat{D}C \text{ در}]{\text{فیثاغورث}} AC^۲ = AD^۲ + DC^۲ \Rightarrow AC^۲ = ۴ + ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۵}$

$\xrightarrow[E\hat{A}C \text{ در}]{\text{قضیه cosها}} EC^۲ = AE^۲ + AC^۲ - ۲AE \times AC \times \cos\alpha \Rightarrow ۴ = ۸ + ۲۰ - ۲ \times ۲\sqrt{۲} \times ۲\sqrt{۵} \times \cos\alpha$

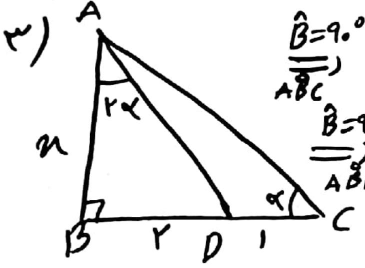
$\Rightarrow ۸\sqrt{۱۰}\cos\alpha = ۲۴ \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}}\ (I)$ $\quad \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \overset{(I)}{\Rightarrow} \sin^۲\alpha + \frac{۹}{۱۰} = ۱$

$\Rightarrow \sin^۲\alpha = \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow \sin\alpha = \underset{\text{غ ق ق}}{\oplus} \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \xrightarrow{\alpha < ۱۸۰} \boxed{\sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}}\ (II)$

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \overset{(I),(II)}{=\!=} \frac{\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}}{\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}} = ③$ ✓

②

---

۳)


$\xrightarrow[A\hat{B}C]{\hat{B}=۹۰^\circ} \cot\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{۳}{x} \overset{(I)}{} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha} = \frac{x}{۳}\ (II)$

$\xrightarrow[A\hat{B}D]{\hat{B}=۹۰^\circ} \cot ۲\alpha = \frac{AB}{BD} = \frac{x}{۲} \Rightarrow \tan ۲\alpha = \frac{۱}{\cot ۲\alpha} = \frac{۲}{x}\ (III)$

$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲\alpha} \overset{(II)}{=} \frac{۲(\frac{x}{۳})}{۱ - (\frac{x}{۳})^۲} = \frac{\frac{۲x}{۳}}{۱ - \frac{x^۲}{۹}} = \frac{\frac{۲}{\cancel{۳}}x}{\frac{۹ - x^۲}{\cancel{۹}}} \overset{III}{=} \frac{۲}{x}$

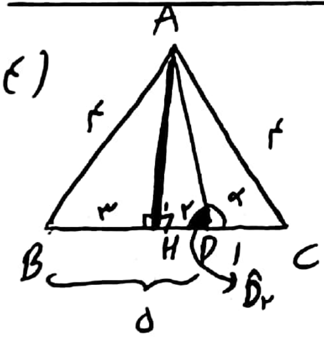
$\Rightarrow \frac{\overset{۳}{۶}x}{۹ - x^۲} = \frac{۲}{x} \Rightarrow ۳x^۲ = ۹ - x^۲ \Rightarrow ۴x^۲ = ۹ \Rightarrow x^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow x = \oplus \frac{۳}{۲} \xrightarrow[x>0]{} x = \frac{۳}{۲}$

غ ق ق ← x طول ضلع است

$\overset{I}{\Rightarrow} \cot\alpha = \frac{۳}{\frac{۳}{۲}} = ②$ ✓

②

---

۴)


$\xrightarrow{A\hat{B}C \text{ متساوی‌الساقین}} AH \rightarrow \begin{cases} \text{ارتفاع، میانه و} \\ \text{عمودمنصف BC} \\ \text{است.} \end{cases} \Rightarrow BH = CH\ (I)$

$\left.\begin{array}{l} BC = BD + DC = ۵ + ۱ = ۶ \\ BC = BH + CH \overset{(I)}{=} ۲CH \end{array}\right\} ۲CH = ۶ \Rightarrow CH = ۳$

$\underset{۳}{CH} = \underset{۱}{CD} + DH \Rightarrow DH = ۲$

$\xrightarrow[A\hat{H}B]{\text{فیثاغورث در}} AB^۲ = BH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۱۶ = ۹ + AH^۲ \Rightarrow AH^۲ = ۷ \Rightarrow AH = \sqrt{۷}$

$\xrightarrow[A\hat{H}D]{\hat{H}=۹۰^\circ} \tan\hat{D}_۲ = \frac{AH}{HD} = \frac{\sqrt{۷}}{۲}$

$\overset{(II)}{\Rightarrow} \tan\alpha = \boxed{\frac{-\sqrt{۷}}{۲}}$ ✓

$\hat{D}_۲ = ۱۸۰^\circ - \alpha \Rightarrow \tan\hat{D}_۲ = -\tan\alpha\ (II)$

②

---

۵)

$۲\sin^۲x + \cos^۲x = \sin^۲x + (\sin^۲x + \cos^۲x) = \sin^۲x + ۱ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \boxed{\sin^۲x = \frac{۱}{۳}}\ (I)$

$\Rightarrow ۱ - \sin^۲x = \boxed{\frac{۲}{۳} = \cos^۲x}\ (II)$ $\quad \tan^۲x = \frac{\sin^۲x}{\cos^۲x} \overset{(I)}{\underset{(II)}{=}} \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = \boxed{\frac{۱}{۲}}$ ✓

②

Scanned with CamScanner

پارسا جهانگیری / یازدهم پسر A

۶) $\frac{\sin^۴\alpha+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}=\frac{(\sin^۲\alpha)^۲+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}=\frac{(۱-\cos^۲\alpha)^۲+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}$

②

$=\frac{\cos^۴\alpha-۲\cos^۲\alpha+۱+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}=\frac{\cos^۴\alpha+۲\cos^۲\alpha+۱}{\cos^۲\alpha+۱}=\frac{(\cos^۲\alpha+۱)^۲}{\cos^۲\alpha+۱}=\cos^۲\alpha+۱ \quad (I)$

$\frac{\cos^۴\alpha+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}=\frac{(\cos^۲\alpha)^۲+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}=\frac{(۱-\sin^۲\alpha)^۲+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}=\frac{\sin^۴\alpha-۲\sin^۲\alpha+۱+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$

$=\frac{\sin^۴\alpha+۲\sin^۲\alpha+۱}{\sin^۲\alpha+۱}=\frac{(\sin^۲\alpha+۱)^۲}{\sin^۲\alpha+۱}=\sin^۲\alpha+۱ \quad (II)$

$\frac{\sin^۴\alpha+۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha}-\frac{\cos^۴\alpha+۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}\overset{(I),(II)}{=}\cos^۲\alpha+\cancel{۱}-\sin^۲\alpha-\cancel{۱}=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha=\boxed{\cos ۲\alpha}$ ✓

---

۷) $\underbrace{\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)}_{\cos\alpha}\underbrace{\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)}_{-\sin\alpha}\underbrace{-\tan(\alpha-\frac{۳\pi}{۲})}_{-\cot\alpha}=-\sin\alpha\cos\alpha+\cot\alpha \overset{(I),(II)}{=}-\frac{۱۲}{۲۵}+\frac{۳}{۴}=\frac{-۴۸+۷۵}{۱۰۰}=\boxed{\frac{۲۷}{۱۰۰}}$ ✓

②

$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۳}{۴} \quad (I)$

$\cot\alpha+\tan\alpha=\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha+\cot\alpha}=\frac{۱}{\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۳}}=\frac{۱}{\frac{۹+۱۶}{۱۲}}=\frac{۱۲}{۲۵} \quad (II)$

---

۸) $۳\cos۴x+\underbrace{\sqrt{۲}(\sin x-\cos x)}_{۲\sin(x-\frac{\pi}{۴})}=۳\cos۴x+\sin(x-\frac{\pi}{۴})\overset{x=\frac{\pi}{۱۲}}{=}۳\cos\frac{\pi}{۳}+۲\sin(\frac{\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۴})$

②

$=۳\cos\frac{\pi}{۳}+\sin(-\frac{\pi}{۶})=(۳)(\frac{۱}{۲})+۲(-\frac{۱}{۲})=\boxed{\frac{۱}{۲}}$ ✓

---

۹) $\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\frac{۸}{۱۵}-\frac{۸}{۱۷}}{\frac{۸}{۱۷}-\frac{۱۵}{۱۷}}=\frac{\frac{۸\times۱۷-۸\times۱۵}{۱۵\times\cancel{۱۷}}}{\frac{-۷}{\cancel{۱۷}}}=\frac{۱۶}{۱۵\times(-۷)}=\boxed{\frac{۱۶}{-۱۰۵}}$ ✓

②

$\tan\alpha=\frac{۲\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۲(\frac{۱}{۴})}{۱-\frac{۱}{۱۶}}=\frac{\frac{۱}{\cancel{۲}}}{\frac{۱۵}{\cancel{۱۶}_۸}}=\frac{۸}{۱۵}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=۸K\\ \cos\alpha=۱۵K\end{cases}$

$\begin{cases}\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱\\ \Rightarrow ۶۴K^۲+۲۲۵K^۲=۱\\ \Rightarrow ۲۸۹K^۲=۱\Rightarrow K^۲=\frac{۱}{۲۸۹}\\ \Rightarrow \boxed{K=\pm\frac{۱}{۱۷}}\end{cases}$ غ ق ق

$K=\frac{۱}{۱۷}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\frac{۸}{۱۷}\\ \cos\alpha=\frac{۱۵}{۱۷}\end{cases}$

$\tan\frac{\alpha}{۲}>۰$, $\sin\alpha=۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$

$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲}$ و $\cos\frac{\alpha}{۲}$ هم علامتند $\}\Rightarrow\sin\alpha>۰$

$\Rightarrow ۸K>۰\Rightarrow K>۰$

---

۱۰) $\frac{\cot\alpha}{\sin\alpha}>۰\Rightarrow\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sin\alpha}>۰\Rightarrow\frac{\cos\alpha}{\underbrace{\sin^۲\alpha}_{\oplus}}>۰\Rightarrow\boxed{\cos\alpha>۰} \quad (I)$

②

$۲\sin\alpha<\sin۲\alpha\xRightarrow[\cos\alpha>۰]{\times\cos\alpha}\underbrace{۲\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin۲\alpha}<\sin۲\alpha\times\cos\alpha\Rightarrow\sin۲\alpha(\underbrace{۱-\cos\alpha}_{\oplus})<۰$

$\Rightarrow\sin۲\alpha<۰\Rightarrow۲\sin\alpha\underbrace{\cos\alpha}_{\oplus}<۰\Rightarrow\boxed{\sin\alpha<۰} \quad (II)$

$\xRightarrow{(I),(II)}$ α در ناحیه‌ی چهارم قرار دارد ✓

Scanned with CamScanner