۱۸٫۵

نام و نام خانوادگی ..... پاسخنامه تشریحی تکلیف شماره ..... کلاس .....

۱

$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 4 \times \sin\alpha = \frac{9}{2} \rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\alpha = 60^\circ \text{ یا } 120^\circ \rightarrow \frac{120}{60} = 2$ ✓

جواب برحسب تراد و رادیان هم ۲ می‌شود

(۲)

۲

$\tan(45+\alpha) = \frac{\tan 45 + \tan\alpha}{1 - \tan(45)\tan\alpha} = 2 \rightarrow$

$\rightarrow 2 = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} \rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 3$ ✓

(۲)

۳

$\tan\alpha = \frac{h}{3}$ ، $\tan 2\alpha = \frac{2}{h} \rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \rightarrow \frac{2}{h} = \frac{\frac{2h}{3}}{\frac{9-h^2}{9}}$

$\rightarrow \frac{2}{h} = \frac{6h}{9-h^2} \rightarrow 6h^2 = 90 \rightarrow h = \frac{3}{2}$ (اندازه منفی ندارد) ← طبق شکل

$\cot\alpha = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$ ✓

(۲)

۴

$\cot(90-\alpha), \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \tan\alpha =$

$= \cot(90-\alpha) = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\tan\alpha = -\tan(90-\alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{2}$

از روی شکل طول خط‌چین را با رابطه فیثاغورث می‌یابیم

(۱٫۵)

۵

$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{3}$ ← $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ← $\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$ ✓

(۲)

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 6$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ → $\dfrac{\sin^4\alpha + 4(1-\sin^2\alpha) - (1-\sin^2\alpha)^2 + 4\sin^2\alpha}{1+(1-\sin^2\alpha)}$ → $\dfrac{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$ (۱)

$\dfrac{t^2-4t+4}{-t+2} + \dfrac{t^2+2t+1}{t+1}$ → $\dfrac{(t-2)^2}{-(t-2)} + \dfrac{(t+1)^2}{t+1} = -(t-2) + t+1$ → ۹

$\to -t+2+t+1 = 3$ (ج)

$1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ → $\dfrac{25}{9} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ → $\cos^2\alpha = \dfrac{9}{25}$, $\sin^2\alpha = \dfrac{16}{25}$ (۲)

عبارت $= (\cos\alpha)(-\sin\alpha) + \cot(\alpha) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{12}{25} = \dfrac{27}{100}$ ✓ ۲

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \to \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{12}$ (۲)

~~$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}$~~

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ → $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$3\cos 60 + \sqrt{3}\sin\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} - \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} =$ ۱

$= \dfrac{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}} - \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}$ ✓ به روش مشتق گیری پایین برای نوشتن:

$\tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ → $\tan\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \dfrac{8}{15}$ → $\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ ۰

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ → $\sin\alpha = \pm\dfrac{8}{17}$, $\cos\alpha = \pm\dfrac{15}{17}$ → عبارت $=$ $\dfrac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}}$ (۲) ۹

$= \dfrac{\frac{16}{225}}{\frac{-7}{17}}$ یا $\dfrac{\frac{245}{225}}{\frac{7}{17}} = \dfrac{\frac{8}{15} + \frac{7}{17}}{-\frac{8}{17} + \frac{15}{17}}$

$\dfrac{-14}{105}$

$2\sin\alpha < \sin 2\alpha$ $\left(\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\right)$ → $2\sin\alpha < 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin\alpha < 0$ ← با توجه به اینکه $\cos\alpha < 1$ پس ضرب آن در عددی مثبت حاصل را کمتر از عدد کرده و نامساوی را بیشتر می‌کند

ناحیه ۳ و ۴

اما اعداد منفی را به صفر نزدیک‌تر و در نتیجه بیشتر می‌کند (۲) ۱۰

$\dfrac{\cot\alpha}{\sin\alpha} > 0$ → $\dfrac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\sin\alpha} > 0$ → $\dfrac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} > 0$ → $\cos\alpha > 0$

ناحیه ۱ و ۴

ناحیه‌ای که $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha < 0$ باشد ناحیه (۴) است ✓

-۷

$$\frac{\sin^4\alpha + 4(1-\sin^2\alpha)}{1+(1-\sin^2\alpha)} - \frac{\cos^4\alpha + 4(1-\cos^2\alpha)}{1+(1-\cos^2\alpha)} =$$

$$\frac{(4-\sin^2\alpha)^{\cancel{2}}}{4-\sin^2\alpha} - \frac{(4-\cos^2\alpha)^{\cancel{2}}}{4-\cos^2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \boxed{\cos 2\alpha}$$

-۸

$$4\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} - \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{4}{2} + \sqrt{2}\underbrace{\left(\sin\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}\right)}_{A}$$

$$A^2 = 1 - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \xrightarrow{A<0} A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

جواب $= \frac{4}{2} + \sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$